S E S ' 2 0 0 5

Scientific Conference "SPACE, ECOLOGY, SAFETY" with International Participation

10–13 June 2005, Varna, Bulgaria

УСУКВАЩИТЕ ДИСИПАТИВНИ ИЗОБРАЖЕНИЯ КАТО ОБОБЩЕН МОДЕЛ НА КЛАСА КИК-ВЪЗБУДИМИ САМОАДАПТИВНИ ДИНАМИЧНИ СИСТЕМИ

В. Дамгов [1], Н. Ерохин [2], П. Тренчев [1]

[1] *Институт за Космически Изследвания – БАН, ул. Московска 6, 1000 София*
[2] *Институт за Космически Изследвания – РАН, Москва, Русия*
vdamgov@bas.bg, nerokhin@mx.iki.rssi.ru, ptrenchev@space.bas.bg

TWIST DISSIPATIVE MAP AS A GENERAL MODEL FOR THE CLASS OF KICK-EXCITED SELF-ADAPTIVE DYNAMICAL SYSTEMS

V. Damgov [1], N. Erokhin [2], Pl. Trenchev [1]

[1] *Space Research Institute - BAS, 6 Moskovska Str., 1000 Sofia, Bulgaria*
[2] *Space Research Institute - RAS, Moscow, Russia*
vdamgov@bas.bg, nerokhin@mx.iki.rssi.ru, ptrenchev@space.bas.bg

Key words: *kick-excited self-adaptive systems, bifurcations, trifurcations*

Abstract: *We show that, with some simplification, the problem of kick-excited dynamical systems' behavior can be solved analytically in Poincare section, thus being reduced to a 2D discrete system of the radial dissipative twist map type. We consider the physical principles comparing our model of kick-excited self-adaptive system chiefly with Fermi-Ulam's and Zaslavsky's maps. We prove that the class of dissipative twist maps is the immanent tool for description and analysis of the wide class of systems and phenomena – Class of kick-excited self-adaptive dynamical systems and phenomena – that has been formed and proposed [1]. Except for being a generalizing model, this class is also remarkable for the fact that it reveals clearly the link of our models with the nearly-integrable Hamiltonian systems..*

ФИЗИЧЕСКА ФОРМУЛИРОВКА НА ПРОБЛЕМА

За основа на анализа ще използваме уравнението на нелинеен осцилатор с една степен на свобода и периодична във времето външна възбуждаща сила, нелинейна по отношение на координатата на движение [1, Chapter 10]. При нашето разглеждане ще използваме следната конкретна форма на уравнението:

$$(1) \qquad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \sin x = \varepsilon(x) F \sin(\nu t); \qquad \varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le d' \\ 0, & |x| > d' \end{cases}$$

където *F* и *d'* са константи.

За изследване на общата задача за кик-възбудимите системи от тип (1) [1] ще използваме апарата на двумерните дискретни изображения [2].

ЕНЕРГИЕН БАЛАНС В СИСТЕМАТА

Инжектираната в системата енергия за едно преминаване през активната зона [-d',d'] е

(2) $$\Delta E_{in} = \int_{-d'}^{d'} F\sin(vt(x))dx$$

Въвеждаме фазова променлива $\psi = vt$ и означаваме с v_a средната скорост в активната зона [*-d',d'*], посредством смяна на променливите получаваме

(3) $$\Delta E_{in} = \int_{\psi_{in}}^{\psi_{out}} \frac{F}{v}\dot{x}\sin\psi d\psi = \frac{Fv_a}{v}\int_{\psi_{in}}^{\psi_{out}} \sin\psi d\psi = \frac{Fv_a}{v}(\cos\psi_{in} - \cos\psi_{out})$$

Където ψ_{in} и ψ_{out} са стойностите на фазовата променлива при влизане и, съответно, при напускане на активната зона [*-d',d*].

Загубите в системата са приблизително равни на тези в случая на свободно махало със затихване, които се дават от израза [3]

(4) $$\Delta E_{out} = 16\beta[E(m) - (1-m)(K(m)],$$

където са използвани следните означения:

(5) $$m = \frac{E_o}{2}; \quad E_o = \frac{\dot{x}^2}{2} + (1-\cos x).$$

K(m) и *E(m)* са пълни елиптични интеграли съответно от първи и втори род.

В (5) с E_o е означена пълната енергия в динамичната система.

КОНСТРУИРАНЕ НА ДИСКРЕТНОТО ИЗОБРАЖЕНИЕ

Нека в качеството на ъглова променлива θ_n вземем средната фаза ψ_o. Изменението на фазовата променлива θ_o за един период може да се изрази чрез периода на движение $T(E)$ и по-нататък – чрез пълния елиптичен интеграл *K(m)*:

(6) $$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{vT(E)}{2} + \pi = \theta_n + 2vK(m_{n+1}) + \pi \quad (\mathrm{mod}\, 2\pi)$$

Енергийният баланс в динамичната система в течение на *n*-ия период може да се представи във вида

(7) $$m_{n+1} = m_n + \Delta m_{in} - \Delta m_{out}$$

където приближено $\Delta E_{in} \cong 2Fd'\sin\psi_o$, $\psi_o = \dfrac{\psi_{in} + \psi_{out}}{2}$.

Записвайки балансовото уравнение (7) заедно с фазовото уравнение (6), получаваме двумерното изображение в следния вид

(8) $$\begin{aligned} m_{n+1} &= m_n - 8\beta[E(m_n) - (1-m_n)K(m_n)] + Fd'\sin\theta_n \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2vK(m_{n+1}) + \pi \quad (\mathrm{mod}\, 2\pi) \end{aligned},$$

което представлява дискретния еквивалент на обикновеното диференциално уравнение (1).

Дисипативният член в енергийното уравнение от (8) може да бъде представено като

(9) $$\Delta m_{out} = 8\beta m\left[K(m) - \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{3}{8}m + ...\right)\right] = 2\pi\beta m\left(1 + \frac{m}{8} + ...\right) = 2\pi\beta m D(m)$$

където *D(m)* е функция, близка до единица при неголеми стойности на *m.*

Изображение (2.8) в този случай се представя във вида

(10)
$$\begin{aligned} m_{n+1} &= m_n(1-2\pi\beta D(m)) + Fd'\sin\theta_n \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2vK(m_{n+1}) + \pi \quad (\mathrm{mod}\, 2\pi) \end{aligned}$$

Анализът на получената дискретна система (10) показва следното.

Вижда се, че якобианът на (10) е близък до единица: $J = 1 - 2\pi\beta(D(m) + mD'(m))$, а $\beta << 1$. Фазовото отместване за една стъпка $\Delta\theta = \theta_{n+1} - \theta_n$ е функция само на енергийната променлива, но взета не в момент *n,* а в момент *n+1.*

Тази форма е характерна за формирания широк клас кик-възбудими самоадаптивни динамични системи [1] и представлява *радиално усукващо изображение* със слаба дисипативна поправка.

Ако разложим във фазовото уравнение на системата (10) елиптичния интеграл *K(m)* и се ограничим до линейния член в последното, изображението ще приеме вида

(11)
$$\begin{aligned} m_{n+1} &= m_n(1-2\pi\beta) + Fd'\sin\theta_n \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2(v+1)\pi + \frac{v\pi}{4} m_{n+1} \quad (\mathrm{mod}\, 2\pi) \end{aligned}.$$

Това е частният вид на тъй нареченото *дисипативно стандартно изображение* (ДСИ), което е много интензивно изследвано в литературата [2,4].

НЕПОДВИЖНИ ТОЧКИ НА ИЗОБРАЖЕНИЕТО

Нека определим неподвижните точки (m^o, θ^o) на (8). Получаваме

(12) $$Fd'\sin\theta^o = 8\beta[E(m^o) - (1-m^o)K(m^o)]$$

(13) $$2vK(m^o) = (2l-1)\pi\ .$$

От (13) се вижда, че при фиксирана стойност на честотата v системата притежава цяло семейство от стойности m_l^o за стационарната енергия при различни стойности на целочисления индекс *l*; при това условието $K(m) \geq \pi/2$ налага ограничение върху *l* така, че $(2l-1) \geq v$. От (13) получаваме приближения дискретен ред за m_l^o при неголеми амплитуди:

(14) $$m_l^o = 4\left[\frac{2l-1}{v} - 1\right].$$

Уравнение (14) наричаме *условие за дискретизация* в системата. Става дума за намереното явление на “квантуване” на динамичните състояния в трептящи системи с нелинейно външно възбуждане [1, Chapter 10].

Друго важно следствие от условието за дискретизация (14) е, че в кик-възбудимата динамична система стационарните стойности m_l^o не зависят от амплитудата на външната сила *F.* Това е втората съществена закономерност на разглеждания клас динамични системи – самоадаптивна свръхустойчивост на възможния дискретен ред амплитуди на колебание при изменение на външната възбуждаща сила, или при други външни въздействия.

УСТОЙЧИВОСТ НА НЕПОДВИЖНИТЕ ТОЧКИ

Нека линеаризираме системата (8) в околността на равновесната точка (m_l^o, θ_l^o). Получава се съответната система за малките пертурбации $(\delta m, \delta\theta)$ около неподвижната точка:

(15) $$\begin{aligned}\delta m_{n+1} &= \delta m_n - 8\beta\left[\frac{dE}{dm} - (1-m_l^o)\frac{dK}{dm} + K(m_l^o)\right]\delta m_n + Fd'\cos\theta_l^o\delta\theta_n \\ \delta\theta_{n+1} &= \delta\theta_n + 2v\frac{dK}{dm}\delta m_{n+1} \quad (\mathrm{mod}\, 2\pi)\end{aligned}$$

Записваме системата (15) в матрична форма

(16) $$\begin{pmatrix}\delta m_{n+1} \\ \delta\theta_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-W & B \\ (1-W)C & 1+BC\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta m_n \\ \delta\theta_n\end{pmatrix} = \hat{M}\begin{pmatrix}\delta m_n \\ \delta\theta_n\end{pmatrix},$$

където за простота на израза въвеждаме следните означения:

(17) $$\begin{aligned}W &= 8\beta\left[\frac{dE}{dm} - (1-m_l^o)\frac{dK}{dm} + K(m_l^o)\right]. \\ B &= Fd'\cos\theta_l^o; \quad C = 2v\frac{dK}{dm}\end{aligned}$$

Линейната устойчивост на неподвижните точки се определя от мултипликаторите на линеаризираната система (16): ако и двата мултипликатора са по-малки по модул от единица, неподвижната точка е устойчива, в противен случай е неустойчива. Тези мултипликатори представляват собствените стойности на матрицата $\hat{M}$ от (16) и могат да се определят от съответното характеристично уравнение, което в нашия случай има вид

(18) $$\lambda^2 - \lambda Tr\hat{M} + \det\hat{M} = 0 .$$

От (16) се вижда, че $Tr\hat{M} = 2 + BC - W$ и $\det\hat{M} = 1 - W$. От последния израз може да се направи важен извод: ако двата мултипликатора са комплексни, то неподвижната точка е устойчива, тъй като $\left|\lambda_1\lambda_1^*\right| = \left|\lambda_2\lambda_2^*\right| = \left|\lambda_1\lambda_2\right| = (1-W) < 1$ (*W* има ролята на дисипация в системата и лесно може да се покаже, че при $\beta > 0$ е малка положителна величина).

Корените на уравнение (17) са

(19) $$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{BC-W}{2} \pm \sqrt{BC + \left(\frac{BC-W}{2}\right)^2} .$$

Решавайки последното неравенство спрямо *BC* и използвайки биномното приближение $(1-x)^n \cong 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$, условието за комплексни собствени стойности придобива вида

(20) $$-(2-W) - 2\sqrt{1-W} < BC < -(2-W) + 2\sqrt{1-W}$$

(21) $$-(4-2W) + W^2/4 < BC < -W^2/4 .$$

В случая на реални мултипликатори, условието за устойчивост $\left|\lambda_{1,2}\right| < 1$ води до $\lambda_1 < 1$ и $\lambda_2 > -1$, като разрешаването на неравенства (18) и (19) спрямо *BC* дава

(22) $-(4-2W) < BC < 0$.

Нека да анализираме условието за устойчивост (21) и за комплексни собствени стойности (20). При *BC* = 0 $\lambda_1 = 1$, а при $BC = -(4-2W)$ $\lambda_2 = -1$. Първият случай (*BC* = 0) отговаря на *седло-фокусна бифуркация*, когато се ражда двойка неподвижни точки – устойчива и неустойчива; при промяна на параметрите в обратна посока пък устойчивата точка се слива с неустойчивата и изчезва. Във втория случай, *BC* = -(4 – 2*W*), се осъществява *бифуркация на удвояване на периода.*

Сега можем да заместим коефициентите *W, B и C* от (17) в (21), за да изразим условията за устойчивост направо чрез физическите параметри на системата. Получаваме

(23) $$-4+16\beta\left[\frac{dE}{dm}-(1-m_l^o)\frac{dK}{dm}+K(m_l^o)\right]<2v\frac{dK}{dm}Fd'\cos\theta_l^o<0$$

Тъй като $\frac{dK}{dm}>0$, дясното неравенство дава просто $\cos\theta_l^o<0$. Двете неподвижни точки, съответстващи на дадено *l* – устойчивата и неустойчивата – се сливат в точката на седло-фокусна бифуркация, когато $\cos\theta_l^o=0$; последното условие дава точно $\left|\sin\theta_l^o\right|=1$, откъдето можем веднага да определим бифуркационната стойност за външната сила F_{sn}:

(23) $$F_{sn}d'=8\beta\left[E(m_l^o)-(1-m_l^o)K(m_l^o)\right]$$

Използвайки разложението на производните от двата пълни елиптични интеграла $\frac{dK}{dm}$ и $\frac{dE}{dm}$ и ограничавайки се до членовете от първи порядък по *m*, неравенство (22) приема вида

(24) $$-4\left[1-\beta\pi\left(1+\frac{m_l^o}{4}\right)\right]<\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{9}{8}m_l^o\right)vFd'\cos\theta_l^o.$$

Пренебрегвайки малкия член в лявата част на неравенството, пропорционален на β, (24) се записва като

(25) $$\left(\cos\theta_l^o\right)^2=1-\left(\sin\theta_l^o\right)^2<\left[\frac{16}{\pi vFd(1+9m_l^o/8)}\right]$$

Замествайки стационарната стойност на $\sin\theta_l^o$, от (25) получаваме като краен резултат израза

(26) $$Fd'<\sqrt{\left[2\pi\beta m_l^o(1+m_l^o/8\right]^2+\left[\frac{16}{\pi v(1+9m_l^o/8)}\right]^2}=F_{pd}d'$$

По аналогичен начин можем да изведем израз относно стойността на параметъра на *трифуркация* F_{3f}.

Условието за седло-фокусна бифуркация на основата на неподвижната точка (23) се дава от следното уравнение относно следата T на линеаризираната матрица (16) :

(27) $$T=2+2\pi vFd'\frac{dK}{dm}\cos\theta_l^o=2\cos(2k\pi/3)$$

Окончателно получаваме израз относно стойността на външната възбуждаща сила F_{3f}, при която се наблюдава *трифуркация* в динамиката на системата:

(28) $$Fd'<\sqrt{\left[2\pi\beta m_l^o(1+m_l^o/8\right]^2+\left[\frac{16}{\pi v(1+9m_l^o/8)}\right]^2}=F_{pd}d'$$

По този начин ние получихме приближени изрази за бифуркационната и трифуркационна стойност на външната сила F_{pd} и F_{3f}, при които настъпва, съответно, удвояване или утрояване на периода. Сравнението на изчислените стойности за F_{pd} и F_{3f} с използване на изрази (25) и (28) показва много добро съгласие с реалните стойности, получени при натурния и числения експеримент [1].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тук бе показано, че задачата за аналитично изследване на кик-възбудими самоадаптивни динамични системи [1] може да бъде решена в сечението на Поанкаре и по такъв начин да се сведе до извода на двумерна дискретна система от типа на радиалното усукващо изображение със слаба дисипативна поправка. Системата дискретни уравнения (11) може да се разглежда като иманентен аналитичен апарат и обобщен кик-модел на формирания в [1] широк клас кик-възбудими самоадаптивни динамични системи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дамгов, В.Н. Нелинейни и параметрични явления в радиофизически системи. София: Академично издателство “проф. Марин Дринов”, 2000, 450 стр.

[2] Lichtenberg, A.J. and M.A.Liberman. *Regular and stochastic motion,* Springer: New York, 1982

[3] Damgov, V.M., P.G.Georgiev. General conditions for resonance oscillation excitation under the action of external nonlinear force. *Comptes Rendus de l’Academie Bulgare des Sciences,* 1998, v.51, No 11

[4] Casdagli, M. Rotational chaos in dissipative systems, *Physica D* 29**,** 1988, p. 365-378