

ИЗСЛЕДВАНЕ НА ДИНАМИКАТА НА АВТОНОМЕН ХАОТИЧЕН ОСЦИЛАТОР ОТ ТРЕТИ РЕД

Антонио Андонов, Галина Чернева

*ВТУ „Т. Каблешков”, София
e-mail: andonov@vtu.bg, cherneva@vtu.bg*

EXAMINATION OF THE DYNAMICS IN THIRD-ORDER AUTONOMOUS CHAOTIC OSCILLATOR

Antonio Andonov, Galina Cherneva

*T. Kableschkov Higher School of Transport
e-mail: andonov@vtu.bg, cherneva@vtu.bg*

Ключови думи: *нелинейни електрически вериги, фазов портрет, хаотичен атрактор*

Резюме: *В предлаганата работа са изследвани динамичните процеси в автономен хаотичен осцилатор от трети ред, генериращ хаотични сигнали, които се използват и при изграждане на космически радиолинии. Получени и анализирани са хаотичните атрактори и устойчивостта на състоянието при различни съотношения между параметрите на веригата, като в качеството на управляващ параметър е използвана големината на активното съпротивление на линейния резистор. Показано е, че дори при липса на външни въздействия, еволюцията на наблюдавания процес може да бъде от типа „цикъл-хаос” или „хаос-хаос”, в зависимост от съотношението на параметрите на веригата.*

1. Въведение

Едно от най-важните достижения на нелинейната динамика през последното десетилетие е откритието на сложни хаотични движения в прости колебателни системи. Много от свойствата на хаотичните сигнали като равномерен спектър, експоненциално затихване на корелационна функция и преди всичко широколентовост, осигуряваща изключително голям коефициент на усилване при обработка на сигнала, ги прави привлекателни при изграждане на космически радиолинии. Тяхното приложение обаче е затруднено от изискването за висока прецизност при проектирането на радиолиниите към използваните хаотични генератори.

Удобен инструмент за изследване на динамиката на хаотичните системи е фазовото пространство, или пространство на състоянията. То позволява нагледно представяне на поведението им в геометрична форма. Всяко изменение на състоянието на системата във времето съответства на движение във фазовото пространство, при което се описва фазовата траектория на поцеса. Според теорията на нелинейните системи [1,2, 3], при време $t \rightarrow \infty$, фазовите траектории на процесите в тях, се стремят към устойчиви гранични множества от стойности - атрактори. Видът на атрактора е различен в зависимост от режима на веригата: стационарен режим - равновесна точка, периодичен режим - граничен цикъл [11], квазипериодичен - тор [8]. При наличие на хаотичен режим във веригата се наблюдават множества на привличане, траекториите на които не могат да се отнесат към горе изброените. Налице са странни атрактори, които се различават съществено от класическите и са критерий за съществуването на стохастичен неперидичен режим. Качественото им отличие е в наличието на специфични свивания на интегралните криви, при което всеки две съседни криви се разделяват експоненциално, но след краен интервал от време отново се приближават много близо една до друга.

366 Естествен е въпросът какво определя наличието на класически и/или странни атрактори в една нелинейна система и каква е еволюцията между тях. Този въпрос е предмет на изследване в настоящата работа чрез анализиране на изменението, което настъпва в състоянието на процесите в хаотичния генератор от трети ред, вследствие промяна на параметрите му.

2. Математичен модел

Нелинейните електрически вериги, независимо от физическата им реализация, се моделират със система нелинейни диференциални уравнения от вида:

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1[\bar{x}, t, \bar{y}]$$

(1),

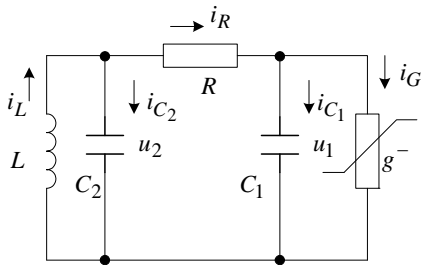
$$\frac{dx_n}{dt} = F_n[\bar{x}, t, \bar{y}]$$

където $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ е множество на променливите, описващи състоянието на веригата, $\bar{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$ е множество параметри, определящо динамиката на веригата; $F = \{F_1, \dots, F_n\}$ представляват функционални зависимости, поне една от които е нелинейна;

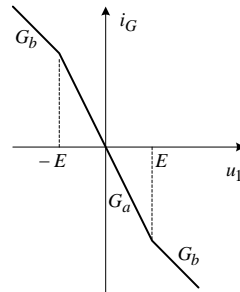
n - брой на променливите на състоянието, респ. на уравненията в системата.

За да се получи нагледно геометрично представяне на динамиката на системата, променливите $x_i, i = 1 \div n$, се разглеждат като координати на точката \bar{x} в n - мерното пространство и се следи траекторията ѝ във фазовото пространство.

Най-елементарните нелинейни вериги, за които математически е доказана възможността за генериране на хаотични сигнали, са веригите от трети ред, съдържащи нелинеен резистор с отрицателна проводимост (фиг.1) и линейно-отсечкова V-A характеристика (фиг.2), известни като вериги на Chua [3].



Фиг. 1



Фиг. 2

Уравненията, които описват процесите във веригата от фиг.1, следват непосредствено от законите на Кирхоф:

$$(2) \begin{cases} i_{C1} = C_1 \frac{du_1}{dt} = i_R - i_G = \frac{1}{R}(u_2 - u_1) - g(u_1) \\ i_{C2} = C_2 \frac{du_2}{dt} = i_L - i_R = \frac{1}{R}(u_1 - u_2) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} = -u_2 \end{cases},$$

където $g(u_1)$ е линейно-отсечкова функция с различна отрицателна проводимост $G_b - G_a - G_b$ (фиг.2), от вида [8]:

$$367 \quad (3) \quad g(u_1) = G_b u_1 + \frac{1}{2}(G_a - G_b)[|u_1 + E| - |u_1 - E|] .$$

Известно е, че нелинейна система диференциални уравнения, с изключение на някои частни случаи, може да се реши само по числен път. За тази цел е по-удобно система (2) да се приведе в безразмерен вид, като се въведат променливите:

$$(4) \quad x = \frac{u_1}{E} ,$$

$$(5) \quad y = \frac{u_2}{E} ,$$

$$(6) \quad z = \frac{i_L R}{E} ,$$

$$(7) \quad \tau = \frac{t}{RC_2}$$

$$(8) \quad \alpha = \frac{C_2}{C_1} ,$$

$$(9) \quad \beta = \frac{R^2 C_2}{L} .$$

Функцията $g(u_1)$ се заменя с

$$(10) \quad f(x) = a_1 x + \frac{1}{2}(a_2 - a_1)(|x + 1| - |x - 1|) ,$$

където:

$$(11) \quad a_1 = RG_b ,$$

$$(12) \quad a_2 = RG_a .$$

Така система (2) добива вида:

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha[y - x - f(x)] \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y \end{cases} .$$

В качеството на управляващи параметри, при изменението на които да се променя топологията на атрактора на състоянието, могат да се използват коефициентите α и β .

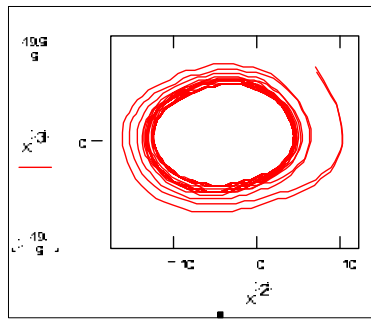
3. Числени експерименти

За базови стойности на параметрите на веригата от фиг.1 са използвани [5,6]: $L = 42,3$ mH, $C_1 = 23,5$ nF, $C_2 = 235$ nF, $G_b = -0,409$ mS, $G_a = -0,758$ mS, $E = 1,8$ V. Стойността на съпротивлението на линейния резистор R е взета в качеството на управляващ параметър и се изменя в граници от 1300Ω до 1900Ω . За всяка стойност на R , респ. β , система (13) е решена в Mathcad и са построени фазовите траектории. Тъй като в случая фазовото пространство е тримерно, се прави двумерна проекция на траекториите.

От получените резултати интерес представляват следните:

1сл. $\beta = 10$ ($R = 1341 \Omega$).

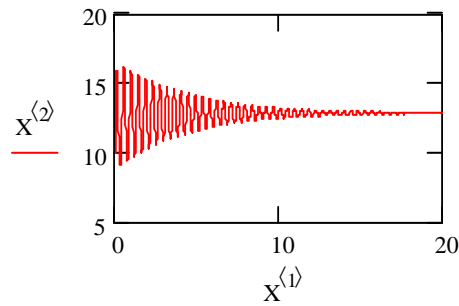
От фазовия портрет, показан на фиг.3 за този случай, се вижда, че решението се стреми към един граничен цикъл, който представлява затворена крива и съответства на периодичен режим във веригата.



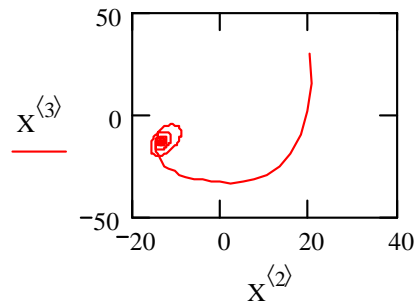
Фиг. 3

2 сл. $\beta = 15$ ($R = 1643 \Omega$).

От вида на напрежението $u_2(t)$, дадено на фиг.4 за този случай, се вижда, че вече е налице неперидичен режим. Неговата фазова траектория е показана на фиг. 5. Тя представлява едноспирален странен атрактор.



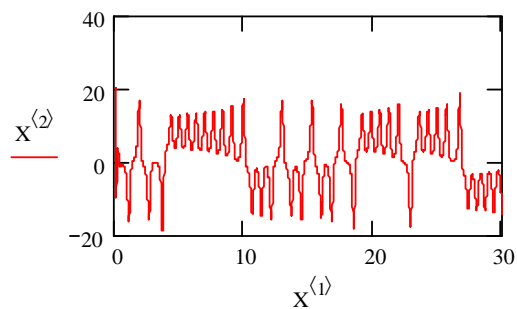
Фиг. 4



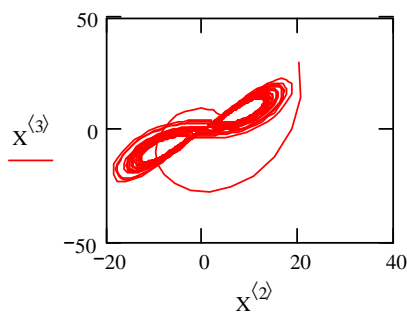
Фиг. 5

3 сл. $\beta = 18$ ($R = 1800 \Omega$).

Отново напрежението $u_2(t)$ има неперидичен характер (фиг.6). Налице е хаотичен процес, чийто фазов портрет (фиг.7) представлява двуспирален странен атрактор.



Фиг. 6



Фиг. 7

4. Анализ на резултатите. Изводи

От направените изследвания се вижда, че вследствие изменение на параметрите на нелинейна верига от трети ред, възникват хаотични колебания като резултат от усложняването на типичен периодичен режим. Получените резултати показват, че в зависимост от големината на линейното съпротивление в разглежданата верига, динамичните процеси в нея се визуализират с класически атрактор в пространството на състоянията (граничен цикъл), или със странен атрактор, който е показател за съществуването на стохастичен режим във веригата. При по-нататъшно изменение на съпротивлението страният атрактор запазва своята топология до един момент, когато настъпва качествена промяна на структурата му – той преминава от едноспирален в двуспирален. Следователно, дори при липса на външни въздействия, еволюцията на наблюдавания процес може да бъде от типа „цикъл-хаос” или „хаос-хаос”, в зависимост от съотношението на параметрите на веригата.

Литература:

1. Torres L., L. Aguirre. Inductorless Chua's circuit, *Electronic letters*, Vol. 36, No 23, 2000.
2. Khalil H. K. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall . 2001.
3. Matsumoto T., L. O. Chua. *Journal of circuits, systems and computers*. Special Issue on Chua's Circuit: Paradigm for Chaos. 1993. V. 3(2).
4. Chunguang L., Ch. Chunguang. Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rossler equations. *Physica*, vol. 341, 2004.
5. Kapitanianc T. *Chaos for Engineers: Theory, Applications and Control*. Second revised edition, Berlin: Springer. 2000
6. Kolumban G., M. P. Kennedy, L. O. Chua., The role of synchronisation in digital communications using chaos - part II : Chaotic modulation and chaotic synchronisation, *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I : fundamental theory and applications*, Vol. 45, No. 11, 1998
7. Hartley T. T., C. F. Lorenzo, H. K. Quammer, Chaos on a fractional Chua's system, *IEEE Transactions on Circuits and Systems. Theory and Applications*, vol.42,1995
8. Baghious E. H., P. Jarry, Lorenz attractor from differential equations with piecewise-linear terms, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 3, No. 1,1993
9. Madan R. N., C.W. Wu, In Chua's circuits: A Paradigm for Chaos., World Scientific, 1993.
10. Baker G. L. and J. G. Gollub: *Chaotic dynamics - an introduction*, Cambridge University Press, 1996
11. Чернева Г., А. Андонов. Изследване на динамични процеси в нелинейни електрически вериги. VIII Международна научна конференция „Транспорт 2008”, ВТУ „Т.Каблешков”, VIII-23-VIII-26