

СЕРФОТРОННОЕ УСКОРЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПАКЕТОМ ИЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

Николай Ерохин¹, Надежда Зольникова¹, Людмила Михайловская¹, Румен Шкевов²,
Стилян Луков²

¹Институт космических исследований – Российская академия наук, Москва, Россия

²Институт космических исследований – Болгарская академия наук, София, Болгария
e-mail: nerokhin@mx.iki.rssi.ru, shkevov@space.bas.bg

Ключевые слова: Ультрарелятивистское ускорение, пакет электромагнитных волн, космическая плазма, нелинейные уравнения, вихревая компонента, серфинг на электромагнитной волне

Аннотация: Исследовано ультрарелятивистское ускорение заряженных частиц при их взаимодействии с пакетом из электромагнитных волн конечной амплитуды, распространяющихся поперек слабого внешнего магнитного поля в космической плазме. С учетом вихревой компоненты электрических полей волн получен интеграл движения системы релятивистских уравнений для ускоряемого заряда и задача сведена к исследованию нелинейного уравнения второго порядка для фазы одной из волн на траектории частицы. Проведены численные расчеты условий захвата и последующего ультрарелятивистского ускорения зарядов в зависимости от начальных данных частицы и исходных параметров волнового пакета. Начальная энергия частиц полагается релятивистской. Численными расчетами показано, что для слабо нелинейных электромагнитных волн при достаточном различии их частот (фазовых скоростей) в пакете и при превышении амплитудами волн некоторого порогового значения имеют место захват и последующее ультрарелятивистское ускорению зарядов, если в начальный момент времени скорость заряда в направлении распространения волн достаточно близка к фазовой скорости одной из мод. Таким образом из проведенного анализа следует, что генерация потоков ультрарелятивистских ускоренных заряженных частиц при серфинге на электромагнитной волне происходит и при воздействии на заряд пакета из волн конечной амплитуды.

CHARGE PARTICLES SURFATRON ACCELERATION BY A SET OF FINITE AMPLITUDE ELECTROMAGNETIC WAVES IN SPACE PLASMA

Nikolay Erokhin¹, Nadezhda Zolnikova¹, Ludmila Mikhailovskaya¹, Rumen Shkevov²,
Stilyan Lukov²

¹Space Research Institute – Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

²Space Research Institute – Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria
e-mail: nerokhin@mx.iki.rssi.ru, shkevov@space.bas.bg

Key words: Ultrarelativistic acceleration, package electromagnetic waves, space plasmas, nonlinear equation, vortex component, surfing on an electromagnetic wave.

Abstract: Charged particles ultrarelativistic acceleration during their interaction with the package of the finite amplitude electromagnetic waves, propagating across the weak external magnetic field in space plasma is studied. Taking into account the wave vortex field component, the integral of motion for relativistic equations describing accelerated charge is received and the problem considered is reduced to the study of second order nonlinear equation for the phase of one of the waves on the particle's trajectory. Computer calculations are made to obtain the trapping conditions following the charges ultrarelativistic acceleration depending on initial particles data and waves parameters. The initial energy of the particles is supposed to be relativistic. The computer calculations have shown that for weakly nonlinear electromagnetic waves under sufficient difference of their frequencies (phase velocities) and at waves amplitudes exceeding certain threshold value there are trapping conditions following the charges ultrarelativistic acceleration, if in the initial time the velocity of the charge along the waves propagation direction is close to the phase velocity of one of the wave modes. Thereby from the

analysis performed it follows that generation of streams of ultrarelativistic accelerated charged particles due to the surfatron mechanism occurs at the charge interaction with some set of finite amplitude electromagnetic waves.

Введение

Одним из основных механизмов генерации космических лучей является серфинг зарядов на электромагнитных волнах в магнитоактивной космической плазме (см., например, [1-4]). Его исследование входит в число актуальных задач астрофизики и представляет интерес для интерпретации данных наблюдений релятивистских частиц в околоземном пространстве. Ясно, что анализ условий захвата заряженных частиц в режим серфотронного, ультрарелятивистского ускорения в зависимости от параметров задачи, а также исследование эффективности данного механизма ускорения при воздействии волновых пакетов необходимо для корректных оценок числа ускоренных частиц, их максимальной энергии и энергетических спектров [5-7]. Данная работа является продолжением ранее выполненных исследований на случай больших начальных энергий заряженных частиц, например, для электронов рассматриваются начальные значения релятивистского фактора порядка 5000.

Параметр нелинейности волн полагается достаточно малым, поля ускоряющей электромагнитной волны считаются заданными и постоянными. Вначале из релятивистских уравнений движения заряда с учетом вихревой компоненты волновых полей получены интегралы движения, что позволяет свести задачу к анализу нестационарного, нелинейного уравнения второго порядка диссипативного типа для фазы электромагнитной волны на траектории захваченной частицы. Это уравнение решается численно для различных значений исходных параметров. Задача оказывается весьма трудоемкой и потому в данной работе изложена только часть возможных вариантов выбора параметров. Для иллюстрации этого отметим, что надежное определение, например, области захвата частицы в режим серфинга сводится к расчету порядка 60000 вариантов.

Результаты проведенных расчетов можно сформулировать следующим образом. При захвате частицы в режим сильного ускорения с течением времени фаза ускоряющей электромагнитной волны на траектории захваченной частицы медленно выходит на некоторое асимптотическое значение, что является характерной особенностью механизма серфинга. Компоненты импульса захваченного заряда и его релятивистский фактор увеличиваются практически линейно с ростом времени, что соответствует постоянному темпу ускорения захваченной волной частицы. При выборе релятивистских значений фазовой скорости волны наибольшее ускорение идет по направлению распространения волны. В обратном случае – низких значений фазовой скорости ($\omega / c k \leq 0.4$) основное ускорение происходит вдоль волнового фронта. Расчеты производились на интервалах безразмерного времени $\tau = \omega t \approx 100000$. Для безразмерной фазовой скорости полагалось $\omega / c k = 0.4$.

За исключением начального интервала времени поперечные к внешнему магнитному полю компоненты импульса захваченной частицы увеличивались практически линейно с ростом времени. На больших временах поперечные (относительно внешнего магнитного поля) компоненты скорости заряда были практически постоянны, например, вариации безразмерной скорости заряда вдоль направления распространения волны не превышали 0.001. Компонента скорости заряда вдоль внешнего магнитного поля в силу сохранения данного импульса частицы стремилась к нулю. С увеличением начальной энергии захваченной частицы (при фиксированной фазовой скорости волны) вариации фазы волны на траектории заряда несколько возрастают.

Из проведенного численного анализа механизма ультрарелятивистского серфинга зарядов на электромагнитной волне следует необходимость дальнейшего упрощения исходного уравнения для фазы волны на траектории захваченной частицы с целью получения асимптотик, например, для темпа ускорения и нестационарного эффективного потенциала, в котором реализуется нелинейная динамика захваченных частиц.

Основные уравнения и их исследование

С точки зрения пренебрежения нелинейными эффектами для ускоряющих волн надо полагать, что амплитуды рассматриваемых волн заметно ниже характерного поля релятивистской нелинейности т.е. $\sigma = e E_0 / m c \omega \ll 1$ поскольку захват в режим серфинга происходит для амплитуд волны выше порога $\sigma > \gamma_p = 1 / (1 - \beta_p^2)^{1/2}$.

Рассмотрим две волны с фазами $\Psi_1 = \omega_1 t - k_1 x$, $\Psi_2 = \omega_2 t - k_2 x + \varphi$

Введем безразмерные переменные $\tau = \omega_1 t$, $\xi = k_1 x$. Имеем связи

$$(1) \quad d\Psi_1 / d\tau = 1 - (\beta_x / \beta_{p1}), \text{ т.е. } \beta_x = \beta_{p1} [1 - (d\Psi_1 / d\tau)],$$

$$\Psi_2 = \Psi_1 \cdot \delta + (\alpha - \delta) \cdot \tau + \varphi, \quad d\Psi_2 / d\tau = \alpha (1 - N_2 \beta_x),$$

где $N_2 = c k_2 / \omega_2$, $\alpha = \omega_2 / \omega_1$, $\delta = k_2 / k_1$, $\beta_{p1} = 1 / N_1$, а N_1, N_2 показатели преломления плазмы на частотах волн. Для двух электромагнитных волн, бегущих поперек внешнего магнитного поля, компоненты полей берем в виде

$$(2) \quad E_x = E_{01} \cdot \cos \Psi_1 + E_{02} \cdot \cos \Psi_2, \quad E_y = \chi_1 \cdot E_{01} \cdot \sin \Psi_1 + \chi_2 \cdot E_{02} \cdot \sin \Psi_2,$$

$$H_z = N_1 \cdot \chi_1 \cdot E_{01} \cdot \sin \Psi_1 + N_2 \cdot \chi_2 \cdot E_{02} \cdot \sin \Psi_2$$

Здесь $\chi_1 = \varepsilon_{\perp 1} / \varepsilon_{c1}$, $\chi_2 = \varepsilon_{\perp 2} / \varepsilon_{c2}$ параметр χ характеризует вихревую компоненту электрического поля волны. Вводим безразмерные: скорость ускоряемого заряда $\beta = v / c$, безразмерные амплитуды волн $\sigma_1 = e E_{01} / m c \omega_1$, $\sigma_2 = e E_{02} / m c \omega_2$.

Заметим, что имеет место соотношение $\beta_x = \beta_{p1} [1 - (d\Psi_1 / d\tau)]$. Тогда безразмерный импульс электрона равен $p / m c = \gamma \beta$, где

$\gamma = 1 / (1 - \beta^2)^{1/2}$ - релятивистский фактор. Теперь релятивистские уравнения движения в

поле двух волн, распространяющихся в плазме поперек внешнего магнитного поля имеют вид

$$d(\gamma \beta_x) / d\tau = -(\sigma_1 \cos \Psi_1 + \alpha \cdot \sigma_2 \cos \Psi_2) - u_1 \cdot \beta_y - (\sigma_1 \cdot N_1 \cdot \chi_1 \sin \Psi_1 + \alpha \cdot \sigma_2 \cdot N_2 \cdot \chi_2 \cdot \sin \Psi_2) \cdot \beta_y,$$

$$(3) \quad d(\gamma \beta_y) / d\tau = -(\sigma_1 \cdot \chi_1 \cdot \sin \Psi_1 + \alpha \cdot \sigma_2 \cdot \chi_2 \cdot \sin \Psi_2) + (\sigma_1 \cdot N_1 \cdot \chi_1 \cdot \sin \Psi_1 + \alpha \cdot \sigma_2 \cdot N_2 \cdot \chi_2 \cdot \sin \Psi_2) \beta_x + u_1 \cdot \beta_x, \quad d(\gamma \beta_z) / d\tau = 0, \quad \gamma \beta_z = \text{const},$$

$$\beta_x = \beta_{p1} [1 - (d\Psi_1 / d\tau)], \quad d\Psi_2 / d\tau = \alpha (1 - N_2 \cdot \beta_x),$$

$$d\Psi_1 / d\tau = (1 - N_1 \cdot \beta_x), \quad \alpha = \omega_2 / \omega_1, \quad \delta = k_2 / k_1.$$

Приведем также выражения для главных характеристик волн через стандартные параметры плазмы:

$u = \omega_{He} / \omega$, $v = (\omega_{pe} / \omega)^2$, где ω_{pe} , ω_{He} соответственно ленгмюровская и циклотронная частоты электронов. Таким образом имеем следующие формулы:

$$\beta_{p1} = (u_1^2 + v_1 - 1)^{0.5} / [(1 + u_1 - v_1) \cdot (u_1 + v_1 - 1)]^{0.5}, \quad u_1 = \omega_{He} / \omega_1,$$

$$v_1 = (\omega_{pe} / \omega_1)^2. \quad \text{Следовательно, откуда вытекает связь}$$

$$v_1 = 1 - 2 \cdot u_1^2 \cdot (1 - \beta_{p1}^2) / [1 - 4 \cdot u_1^2 \cdot \beta_{p1}^2 \cdot (1 - \beta_{p1}^2)]^{1/2}.$$

Для второй волны записываем

$$v_2 = v_1 / \alpha^2, \quad u_2 = u_1 / \alpha, \quad N_2^2 = [(1 - v_2)^2 - u_2^2] / (1 - u_2^2 - v_2),$$

или выражая через v_1, u_1 получаем

$$N_2^2 = 1 + v_1 (\alpha^2 - v_1) / [\alpha^2 (u_1^2 + v_1 - \alpha^2)], \quad v_1 < \alpha^2 < u_1^2 + v_1, \quad \beta_{p2} < 1,$$

$$\chi_1 = (1 - v_1 - u_1^2) / u_1 v_1, \quad \chi_2 = \alpha \cdot (\alpha^2 - v_1 - u_1^2) / u_1 v_1,$$

$$\delta = \alpha \cdot \beta_{p1} / \beta_{p2}, \quad \beta_{p2} = 1 / N_2.$$

Заметим, что из условия $\beta_{p2} < 1$ (фазовая скорость второй моды меньше скорости света в вакууме) находим допустимый интервал изменения параметра α : $v_1 < \alpha^2 < u_1^2 + v_1$.

Для последующего анализа важно, что система релятивистских уравнений движения заряженной частицы (3) с учетом воздействия обеих волн имеет следующие интегралы движения $h = \gamma \cdot \beta_z = \text{const}$,

$$J = \gamma \cdot \beta_y + u_1 \cdot \beta_{p1} \cdot (\Psi_1 - \tau) - \sigma_1 \cdot \chi_1 \cdot \cos \Psi_1 - \alpha \cdot \sigma_2 \cdot \chi_2 \cdot \cos \Psi_2,$$

$J = \text{const}$. Отсюда можно получить выражения для у-компоненты скорости и релятивистского фактора частицы:

$$\beta_y = [J + u_1 \cdot \beta_{p1} \cdot (\tau - \Psi_1) + \sigma_1 \cdot \chi_1 \cdot \cos \Psi_1 + \alpha \cdot \sigma_2 \cdot \chi_2 \cdot \cos \Psi_2] / \gamma,$$

$$\gamma = (1 + h^2 + r^2)^{1/2} / (1 - \beta_x^2)^{1/2},$$

$$r \equiv J + u_1 \cdot \beta_{p1} \cdot (\tau - \Psi_1) + \sigma_1 \cdot \chi_1 \cdot \cos \Psi_1 + \alpha \cdot \sigma_2 \cdot \chi_2 \cdot \cos \Psi_2.$$

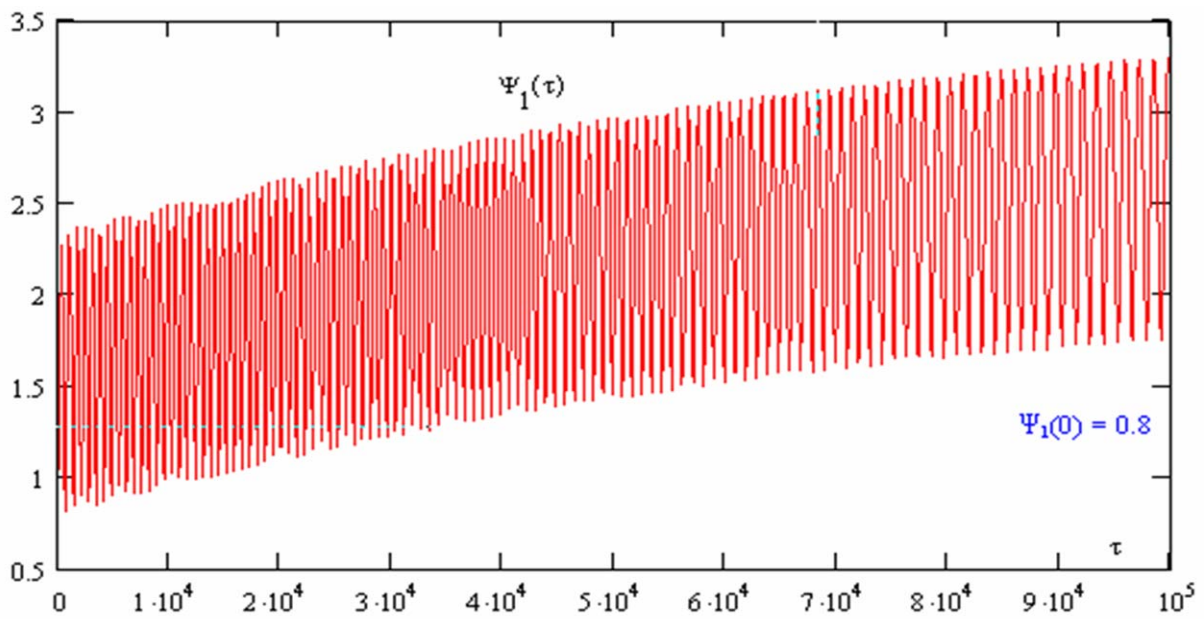
В итоге из (3) следует окончательное уравнение для фазы первой электромагнитной волны на траектории заряженной частицы

$$(4) \quad d^2 \Psi / d\tau^2 + A_1 \cdot (\sigma_1 \cdot \cos \Psi_1 + \alpha \cdot \sigma_2 \cdot \cos \Psi_2) + A_2 \cdot S = 0$$

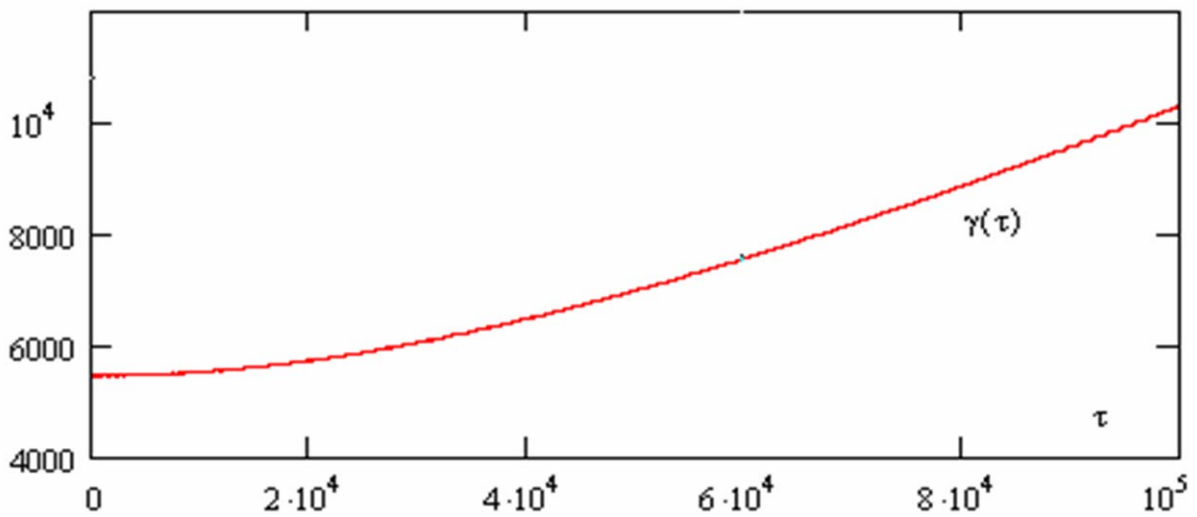
$$\text{где введены обозначения: } A_1 = (\beta_x^2 - 1) / \gamma \cdot \beta_{p1}, \quad A_2 = \beta_y / \gamma \cdot \beta_{p1},$$

$$S = \sigma_1 \cdot \chi_1 \cdot (\beta_x - N_1) \cdot \sin \Psi_1 + \alpha \cdot \sigma_2 \cdot \chi_2 \cdot (\beta_x - N_2) \cdot \sin \Psi_2.$$

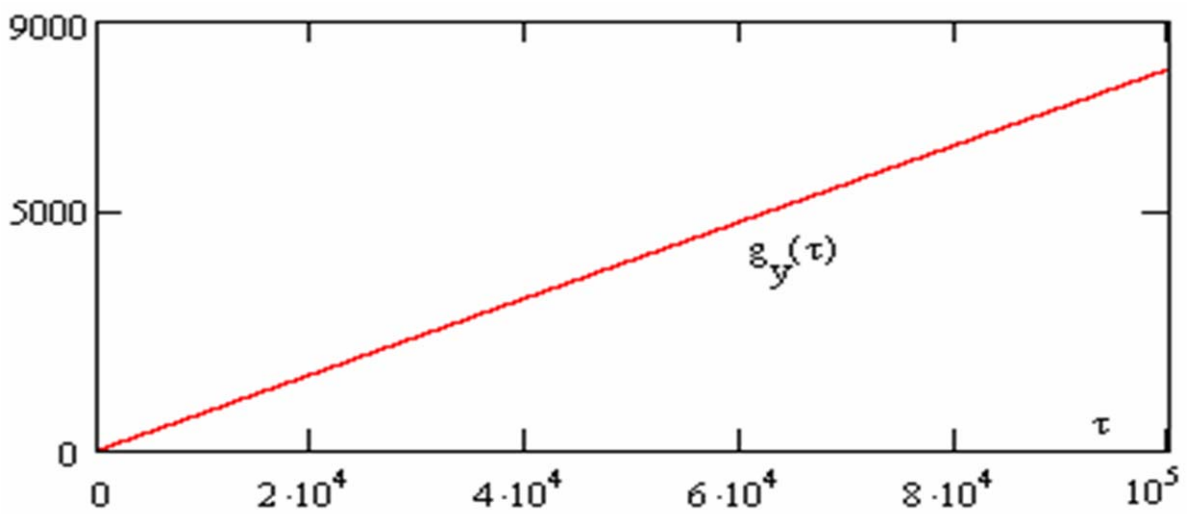
Как видим из уравнения (4), динамика захвата и последующего ускорения зарядов волнами описывается нелинейным, нестационарным уравнением. Поэтому для его анализа необходимо использовать численные расчеты. Поскольку имеется несколько свободных параметров задача является весьма трудоемкой и ниже изложены только некоторые случаи изучаемого процесса. В расчетах поступаем следующим образом. Задаются параметры первой



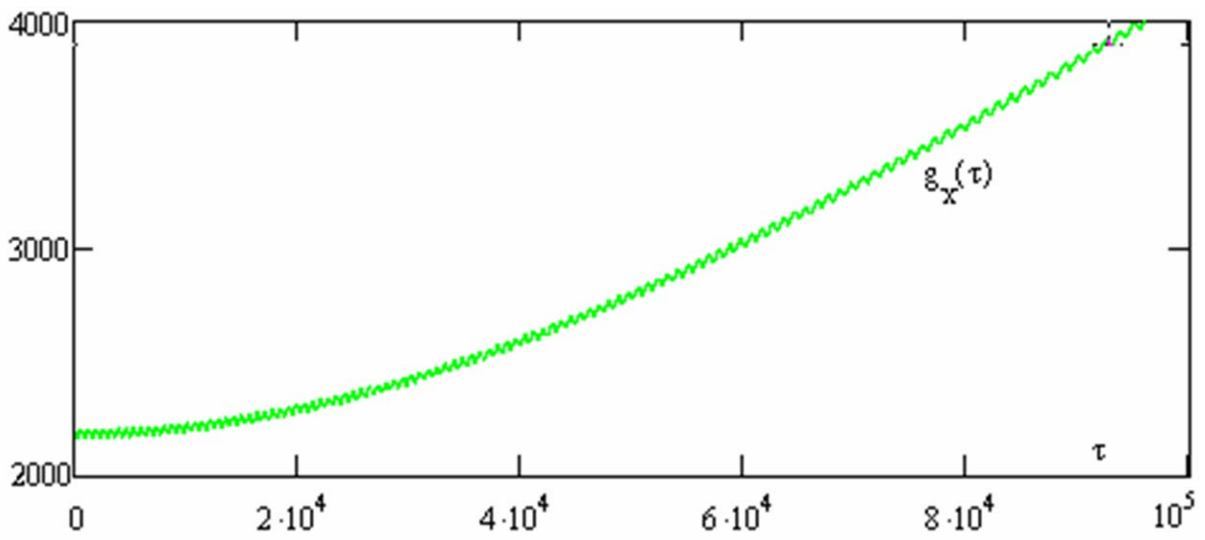
Фиг. 1. Динамика колебаний фазы первой волны на траектории ускоряемого заряда вблизи нижней границы благоприятного для удержания частицы диапазона фаз.



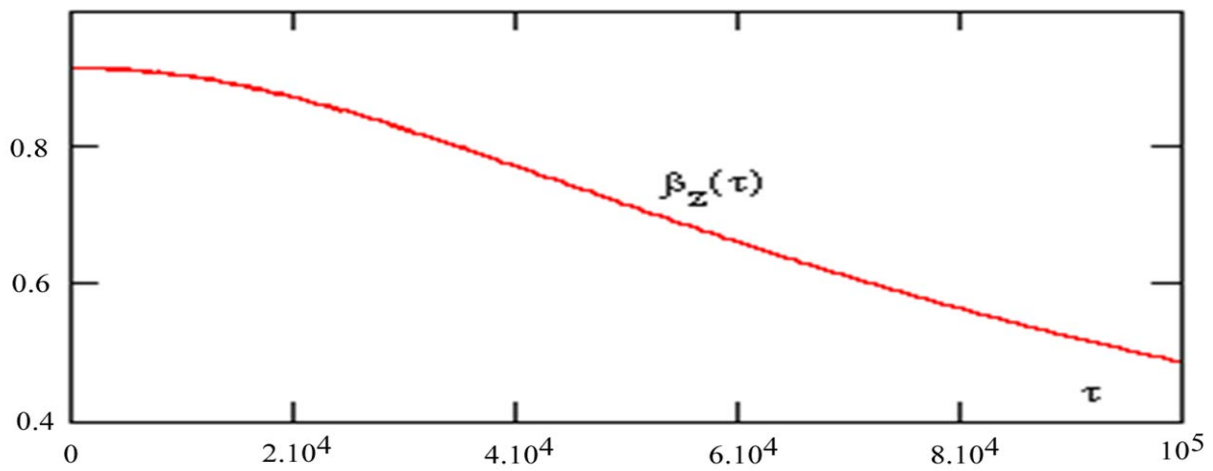
Фиг. 2. График релятивистского фактора заряда $\gamma(\tau)$ при $\Psi_1(0) = 0.8$. Имеем $\max \gamma \approx 10930$.



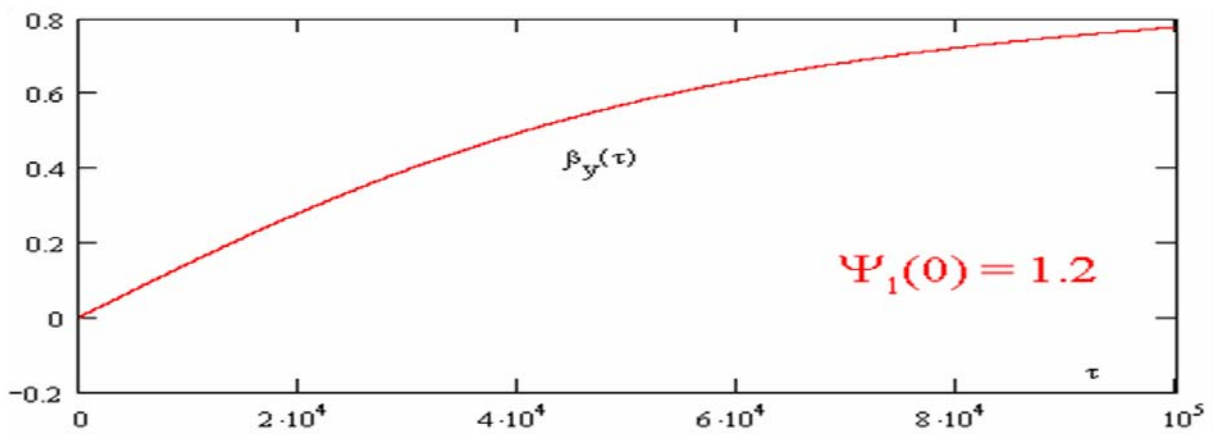
Фиг. 3. Динамика компоненты импульса заряда вдоль волнового фронта ϵ_y для случая $\Psi_1(0) = 0.8$. Отметим практически линейный рост ϵ_y с увеличением времени.



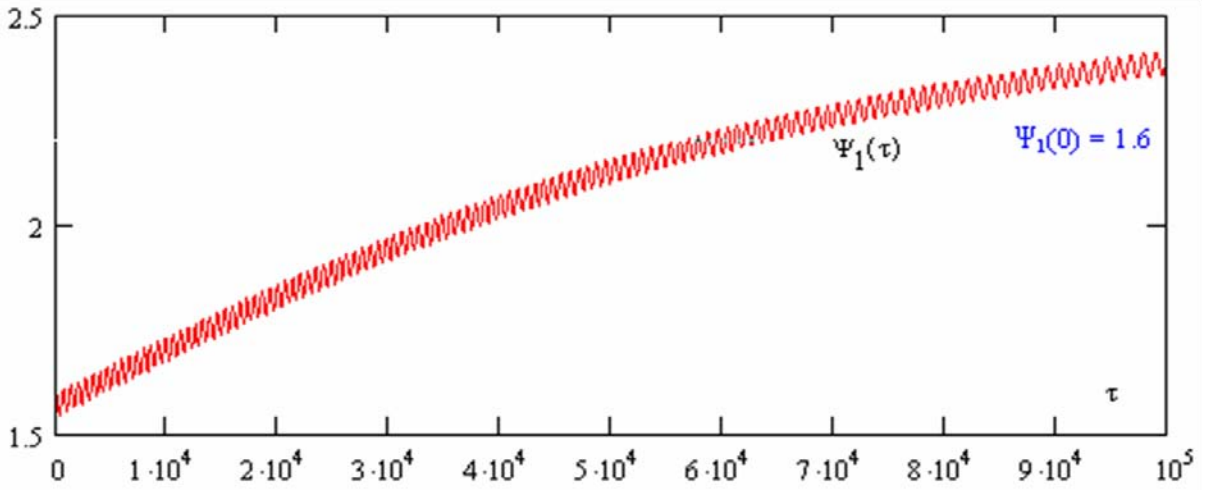
Фиг. 4. Временная динамика компоненты импульса ускоряемого заряда, параллельной направлению распространения волны, $\Psi_1(0) = 0.8$.



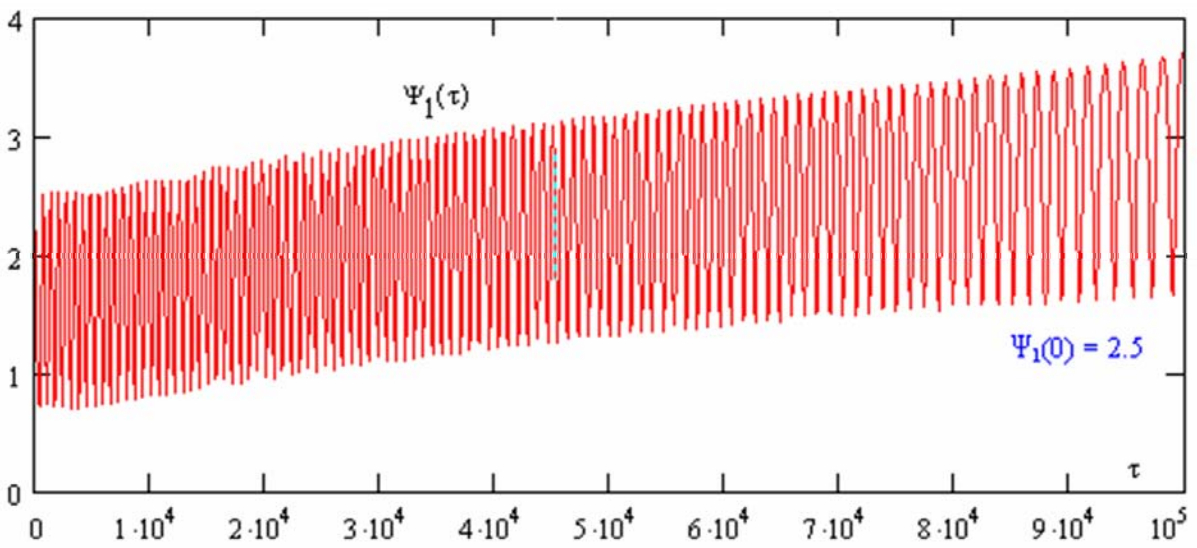
Фиг. 5. Временная динамика скорости ускоряемого заряда вдоль внешнего магнитного поля, $\Psi_1(0) = 0.8$.



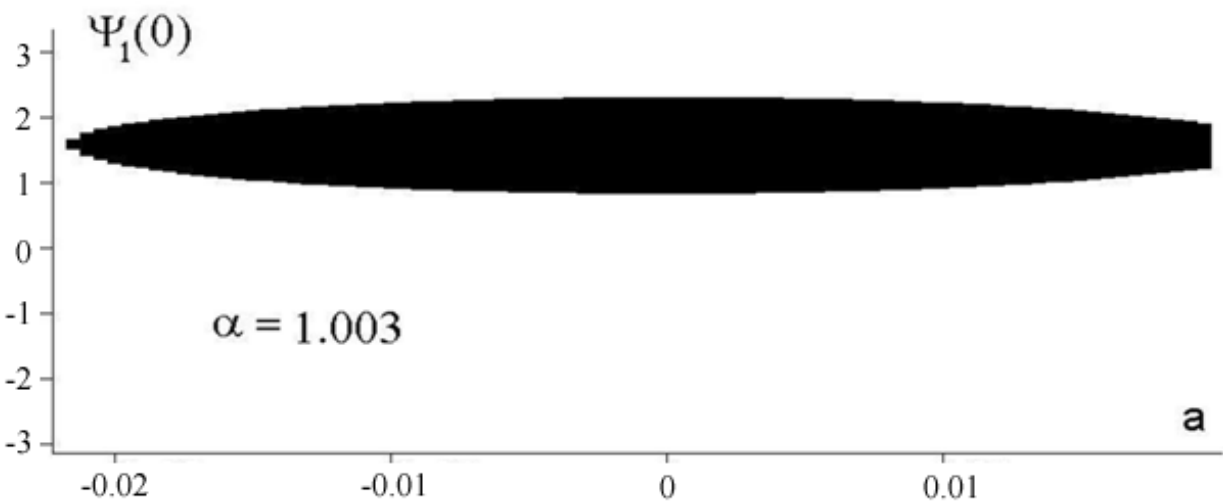
Фиг. 6. Временная динамика скорости ускоряемого заряда вдоль волнового фронта $\Psi_1(0) = 1.2$.



Фиг. 7. Временная динамика фазы волны на траектории ускоряемого заряда при выборе $\Psi_1(0) = 1.6$ в середине благоприятного для ускорения диапазона начальных фаз.



Фиг. 8. Временная динамика фазы волны на траектории ускоряемого заряда при выборе $\Psi_1(0)$ на верхней границе благоприятного для ускорения диапазона начальных фаз, $\Psi_1(0) = 2.5$.



Фиг. 9. Область захвата частиц в режим ультрарелятивистского ускорения на плоскости начальных данных; при расчетах шаг по начальной фазе $\delta\Psi_1(0) = 0.02$, по скорости он соответствовал $\delta a = 0.0005$, время счета $\tau = 100000$.

моды, собственно u_1 , β_{p1} , σ_1 . Затем варьируя параметры α , σ_2 подбираем параметры второй моды и проводим численные расчеты. Из физических соображений ясно, что при достаточно большой разнице фазовых скоростей волн вторая мода не будет препятствовать захвату и ускорению частиц первой модой поскольку ее воздействие носит быстроосциллирующий характер.

В данной работе изучается случай захвата в режим сильного ускорения первой модой релятивистской частицы т.е при $h \gg 1$. Берем следующие значения исходных параметров : $h = 5000 = \gamma(0) \cdot \beta_z(0)$, $g = \gamma(0) \cdot \beta_y(0) = 0$, $u_1 = 0.2$, $\beta_{p1} = 0.4$, $\gamma_{p1} = 1.09109$, $v_1 = 0.9662174$, $\sigma_1 = 0.24$, $\chi_1 = -0.03217$, $a = 0$ т.е. $\beta_x(0) = \beta_{p1}$, где $a \equiv d\Psi_1 / dt|_{\tau=0}$, $g_y = \gamma \cdot \beta_y$, $h = \gamma \cdot \beta_z$, $\sigma_1 = 1.1 \sigma_c$, $\sigma_c = u_1 \gamma_{p1}$ $0.98296 < \alpha < 1.00311$, $g_y(0) = g$, $\beta_x(0) = \beta_{p1} (1 - a)$.

Отметим, что имеет место формула $[\gamma(0)]^2 = 1 + h^2 + g^2 + [\gamma(0)]^2 \cdot [\beta_x(0)]^2$, Полагаем $\alpha = 1.003$, $\varphi = \pi$. Амплитудный параметр второй моды $v = E_{02} / E_{01}$ был взят равным $v = 1$.

Рассматривалось взаимодействие ультрарелятивистского заряда с волнами для различных значений начальной фазы первой моды $\Psi_1(0)$, которая менялась в интервале (0.5 ÷ 2.8). Расчеты показали, что на этом интервале времени счета устойчиво удерживаются волной частицы с $0.8 \leq \Psi_1(0) \leq 2.5$. Для $\Psi_1(0) = 0.7$ заряд удерживается и ускоряется волной до $\tau \approx 92706$, если взять $\Psi_1(0) = 0.6$, то удержание имеет место на временах до $\tau \approx 76421$. Аналогично при больших значениях фазы $\Psi_1(0) = 2.6$ заряд ускорялся волной до $\tau \approx 81716$, а в случае $\Psi_1(0) = 2.8$, удержание имеет место для $\tau \leq 58337$. В области фаз, соответствующих длительному захвату и ускорению частиц, максимальное значение релятивистского фактора заряда (при $\tau \approx 10^5$), временная динамика компонент его импульса и скорости практически не зависят от значения $\Psi_1(0)$. Выяснилось, что в середине благоприятного для ускорения частиц интервала т.е. при $\Psi_1(0) \approx 1.6$ размах колебаний фазы минимален, но возрастает при удалении к его концам. Это видно из графиков фазы $\Psi_1(\tau)$, $\gamma(\tau)$, компоненты импульса $g_x(\tau)$, скорости $\beta_z(\tau)$.

Как видим, при наличии второй волны на плоскости начальных данных структура области захвата частиц в режим ультрарелятивистского ускорения может быть односвязной.

Рассмотрен общий случай произвольного (линейного) волнового пакета. Найдены интегралы движения заряда в поле волн и показано, что задача анализа ускорения частиц волнами сводится к исследованию нестационарного, нелинейного уравнения второго порядка для фазы одной из волн на траектории ускоряемого заряда. Данное уравнение может быть рассмотрено для заранее заданного пакета волн с некоторым распределением по амплитудам и фазам в зависимости от частоты волны. Следовательно, можно изучать влияние частотной дисперсии на эффективность механизма серфинга. Из предварительных оценок следует, что для локализованного в пространстве волнового пакета его ширина L должна быть больше $c \cdot \beta_{p1} \cdot \tau$, где τ характерное время ультрарелятивистского ускорения заряда.

Заключение

В работе изложены результаты численных расчетов захвата и сильного ускорения зарядов с ультрарелятивистской начальной энергией в магнитоактивной плазме при воздействии двух электромагнитных волн конечной амплитуды. Задача решается численными расчетами нестационарного, нелинейного уравнения второго порядка диссипативного типа для фазы первой волны на траектории частицы. Волны распространяются поперек достаточно слабого внешнего магнитного поля. Амплитуды волн и их частоты полагаются близкими. На больших временах времени поперечные к внешнему магнитному полю компоненты импульса захваченной частицы увеличивались практически линейно с ростом времени, а поперечные (относительно внешнего магнитного поля) компоненты скорости заряда были практически постоянны. Компонента скорости заряда вдоль внешнего магнитного поля в силу сохранения данного импульса частицы стремилась к нулю. Динамика колебаний фазы волн на траектории ускоряемого заряда свидетельствует о том, что эффективная потенциальная яма эволюционирует с течением времени, например, ее минимум сдвигается в область больших значений фазы. Темп роста энергии частицы практически не зависит от значения начальной фазы из диапазона благоприятных для удержания фаз. Размах колебаний фазы минимален при начальных фазах (в рассмотренном случае) $\Psi_1(0) \approx 1.6$, соответствующих минимуму эффективной потенциальной ямы, но значительно увеличивается вне узкой окрестности этого минимума. За границами благоприятного для ускорения частиц диапазона фаз время удержания заряда в эффективной потенциальной яме быстро уменьшается. Из проведенных расчетов следует, что в случае ультрарелятивистских зарядов, когда период их колебаний в эффективной потенциальной яме становится весьма большим, необходимо сильно увеличивать время численных расчетов, например, до $\tau \approx 10^6$.

Рассмотрен общий случай произвольного (линейного) волнового пакета с заранее заданным распределением амплитуд и фаз :

$$E_x = \sum_n E_n \cos \Psi_n, \quad \Psi_n = \omega_n t - k_n x + \varphi_n, \quad E_x = \sum_n E_n \chi_n \sin \Psi_n, \\ H_z = \sum_n E_n \chi_n N_n \sin \Psi_n$$

Найдены интегралы движения заряда в поле указанного волнового пакета и показано, что задача анализа ускорения частиц волнами сводится к исследованию нестационарного, нелинейного уравнения второго порядка для фазы одной из волн на траектории ускоряемого заряда. Данное уравнение может быть рассмотрено для заранее заданного пакета волн с некоторым распределением по амплитудам и фазам в зависимости от частоты волны. Следовательно, можно изучать влияние частотной дисперсии на эффективность механизма серфинга.

Литература:

1. Ерохин Н.С., С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев. Письма в *Астрономический журнал*, 1989, т.15, № 1 с.3.
2. Кичигин Г. Н. *ЖЭТФ*, 2001, т.119, вып.6, с.1038.
3. Ерохин Н. С., П. П. Гриневич, А. Н. Ерохин, Н. Н. Зольникова – Научная сессия "МИФИ-2008", сборник научных трудов, М.: МИФИ, 2008, т.9, с.115.
4. Erokhin N., N. Zolnikova, R. Shkevon, L. Mikhailovskaya, P. Trenchev. Доклады на Българската академия на науките, 2007, т.60, № 9, с.967.
5. Гриневич П. П., Н. Н. Ерохин, Н. С. Ерохин, Н. Н. Зольникова, Е. В. Филонова. XLII Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии. Тезисы докладов. Секции физики. Москва, Изд-во РУДН, 2006, с.18.
6. Erokhin N. S., N. N. Zolnikova, P. P. Grinevich, L. A. Mikhailovskaya. Problems of Atomic Science and Technology, серия "Плазменная электроника", 2006, No 5, P.152.
7. Гриневич П. П., Н. С. Ерохин, Н. Н. Зольникова. Научная сессия МИФИ-2007. Сборник трудов, Изд-во МИФИ, Москва, 2007, т.7, с.49.
8. Ерохин Н. С., Е. В. Филонова, Н. Н. Ерохин. Сборник научных трудов "Научная сессия МИФИ-2006", Москва, МИФИ, 2006, т.7, с. 36.