S E N S 2 0 0 8
Fourth Scientific Conference with International Participation
SPACE, ECOLOGY, NANOTECHNOLOGY, SAFETY
4–7 June 2008, Varna, Bulgaria

ГЕОМЕТРИЧНИ ЕЛЕМЕНТИ ПРИ ЧИСЛЕНИТЕ СИМУЛАЦИИ

Пламен Тренчев

Институт за космически изследвания –Българска академия на науките
e-mail: ptrenchev@space.bas.bg

Ключови думи: *геометрични елементи, числено интегриране, пръстени, нелинейна динамика, орбитални елементи*

Резюме: *Разгледани са трансформациите за конвертиране на вектора на състоянието в декартови координати в геометрични елементи, както и обратната задача – преобразуване на геометричните елементи във вектор на състоянието за тест-частица, движеща се около сплесната в полюсите си планета. Тези трансформации са прецизни до втори ред по отношение на ексцентрицитета и инклинацията. Това е полезно и може уверено да се използва при директни изчисления, например при числено изследване динамиката на пръстени.*

За описване формата на тесни пръстени в планетарни системи, например пръстените на Уран, често се използва система уравнения, представена най-общо във вида:

$$r = a\left[1 - e\cos(z\Psi + z\beta)\right], \tag{1}$$

или посредством суперпозиция от синусоидални членове от един и същи вид, където *r* е радиуса на пръстена, *z* е азимуталнното вълново число (целочислена стойност), *β* е фазовият ъгъл, *Ψ* е дължината на разглеждания отрязък , въртящ се със скорост Ω_p , съответстващо на орбитална дължина *L* спрямо инерциална отправна система посредством зависимостта $\Psi = L - \Omega_p t$. Това е за концентрични пръстени. В случай на елиптични пръстени $z = 1$, $\Omega_p = \dot{\varpi}$, където $\dot{\varpi}$ е стойността на прецесията. Орбиталните елементи (главна полуос а, ексцентрицитет е, и т.н.), които следват от ур.(1), по отношение на измервателните данни се разглеждат като геометрични елементи и се различават от по-често използваните оскулиращи елементи, особено в случаите, когато се отчита и сплеснатостта на планетите. Оскулиращите елементи са тези, които тест-частицата би имала при пренебрегване сплеснатостта на планетата. Когато централното тяло е сплеснато (в полюсите), оскулиращите лементи изпитват значителни късо-периодични вариации. Геометричните елементи, от своя страна, също изпитват късо-периодични осцилации, но амплитудата на тези осцилации е много малка и може да бъде пренебрегната.

Освен това, частица на кръгова орбита около сплесната в полюсите планета притежава положителен (по-голям от нула) оскулиращ ексцентрицитет $e_0 \sim \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_p}{r}\right)^2$. Действително, ексцентрицитета на частицата би бил оскулиращ ексцентрицитет, ако решим да не отчетем сплеснатостта на планетата. Същият проблем възниква и при главната полуос – главната полуос на частица, намираща се на кръгова орбита около сплесната в полюсите планета ще има оскулираща стойност $a_0 \sim r\left[1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_p}{r}\right)^2\right]$, ако пренебрегнем сплеснатостта. Примерно, за частица на кръгова орбита около Сатурн с радиус *r* = 137 000 km имаме $e_0 \sim 0.0045$ и $a_0 \sim 137650 km$, което съответства на външния край на главните пръстени. По този начин оскулиращата стойност на главната полус ще бъде съществено различна от геометричния радиус на орбитата. Ето защо геометричните елементи са удобни за използване, когато разглеждаме орбитите на сателити (с малки ексцентрицитети и наклони на орбитите) или частици от пръстените на сплеснати в полюсите планети.

Дефинирането на геометричните елементи става с помощта на т.нар. епициклична теория. Тази теория е дело на индийския учен Чандрасекар и е представена от него 40-те години на миналия век по отношение на звездната динамика. Тя се отнася за почти кръгови и почти екваториални движения. Тази теория може да бъде приложена при планетарните пръстени, защото всички известни пръстени имат малки ексцентрицитети и малки наклони на орбитите си. Точните решения на уравненията на движение са разширени серии около кръговите екваториални орбити. Константите, възникващи от тези разширени серии, са епицикличните елементи. Теорията включва също така и три базисни честоти, които са: ъглова скорост на въртене по кръгова орбита, хоризонтална епициклична честота k, която характеризира радиалните осцилации около кръгово движение, вертикална епициклична честота v, която характеризира вертикалните осцилации. От тези епициклични елементи можем да въведен нова система от елементи, която прави епицикличното решение аналогично на по-разпространеното и познато елиптично решение. Тези нови елементи са именно геометричните елементи.

При числените симулации движението на тест-частица често се интегрира в плането-центрирана декартова координатна система. По този начин можем да трансформираме геометричните елементи във вектори на състоянието (вектор на скоростта и вектор на положението) в плането-центрирана декартова координатна система. Това е необходимо, например, в самото начало на интегрирането, когато са известни само орбиталните елементи. Разсъждавайки в обратна посока, можем да преобразуваме вектора на състоянието на разглежданата частица в даден момент време в геометрични елементи като резултат от интегрирането.

Заключение

В настоящата работа се разглежда аналитично трансформирането на геометрични елементи във вектор на състоянието, както и обратната задача за преобразуване на вектора на състоянието в декартови координати в геометрични елементи. Пълните аналитични преобразувания са обект на последваща по-детайлна работа в настоящия цикъл изследвания, което включва и разширяване сферата и конкретните случаи на прилагане на представените трансформации в космическата динамика, при числено изследване динамиката на пръстените и др.

Литература:

1. L o n g a r e t t i P. and B o r d e r i e s N. Streamline formalism and ring orbit determination. 1991, Icarus 94, 165-170
2. C h a m b e r s J. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies, 1999, MNRAS 304, 793–799
3. B o r d e r i e s – R a p p a p o r t N. and L o n g a r e t t i P. Test particle motion around an oblate planet, 1994, Icarus 107, 129–141.