**S E N S 2 0 0 8**
*Fourth Scientific Conference with International Participation*
SPACE, ECOLOGY, NANOTECHNOLOGY, SAFETY
*4–7 June 2008, Varna, Bulgaria*

# ФАМИЛИИ ОТ ПЕРИОДИЧНИ РЕШЕНИЯ В АВТОНОМНИ ХАМИЛТОНОВИ СИСТЕМИ. ПРИЛОЖЕНИЯ В ДИНАМИЧНО СВЪРЗАНИ ГРУПИ В СЛЪНЧЕВАТА СИСТЕМА

**Пламен Тренчев**

*Институт за космически изследвания – Българска академия на науките*
*e-mail: ptrenchev@space.bas.bg*

***Ключови думи:*** *ограничен проблем на три тела, периодични решения, хамилтониан*

***Резюме***: *Разгледан е ограничения проблем на три тела в кръгова орбита. Той се описва посредством автономна хамилтонова система с две степени на свобода и един параметър* $\mu \in [0,1/2]$, *който е масово съотношение на две масивни тела. Периодичните решения на този проблем формират дву-параметрични фамилии. Изследват се методи за пресмятане на симетрични периодични решения за множество стойности на параметъра μ.*

Разглеждаме три точкови тела $P_1$, $P_2$ и $P_3$, движещи се плоска равнина под действието на нютоновия закон за гравитация. Телата $P_1$ и $P_2$ са с маси съответно $m_1$ и $m_2$, а масата на третото тяло приемаме за нищожно малка и практически не влияеща на тела $P_1$ и $P_2$. Поради това допускане приемаме масата на тяло $P_3$ да е равна на нула. В такъв случай тяло $P_2$ ще се движи по кеплерова орбита спрямо тяло $P_1$. Ако тяло $P_2$ се движи по кръгова орбита, тогава проблема за движение на тялото $P_3$ се нарича плосък кръгов ограничен проблем на три тела. Да допуснем, че масата, времето и разстоянието са подходящо избрани така, че сумата $m_1 + m_2$, гравитационната константа, разстоянието $P_1 P_2$ и ъгловата скорост $P_2$ спрямо $P_1$ са равни на единица. В такъв случай се получава единствен параметър $\mu = \frac{m_2}{m + m_2} \in [0,1/2]$.

Ако въведен координатна система, въртяща се с $P_2$, т тогава в тази координатна система с център $P_1$ позицията $x_1 x_2$ на тялото $P_3$ се описва посредством Хамилтониан с две степени на свобода и един параметър $\mu$:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \dot{x}_j &= \partial H / \partial y_j \\ \dot{y}_j &= -\partial H / \partial x \end{aligned} \qquad j = 1, 2$$

където

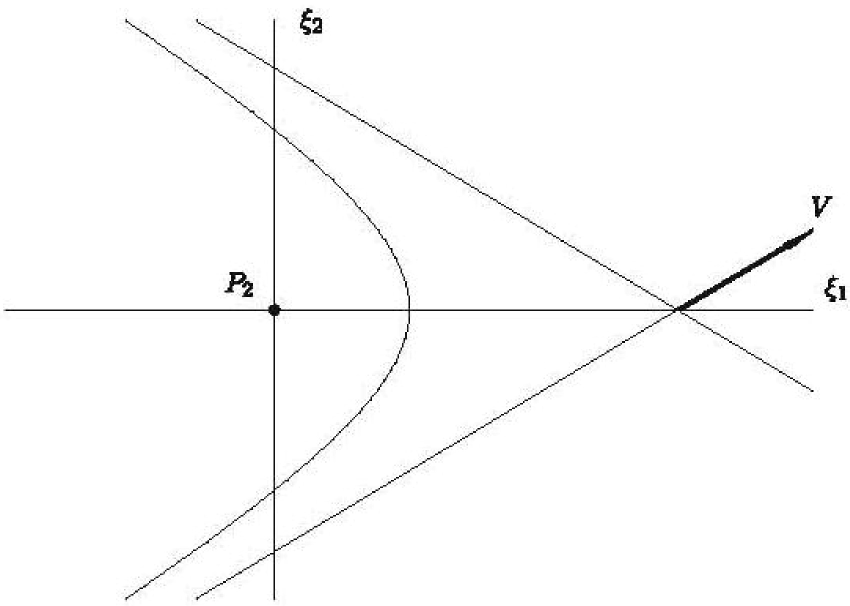
$$(2) \qquad \begin{aligned} &H = H_o + \mu R, \quad H_o = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - \frac{1}{r} \\ &R = \frac{1}{r} + x_1 - \frac{1}{r_2}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

При $\mu \neq 0$ задачата е неинтегрируема. При $\mu = 0$ задачата е интегрируема и всички нейни решения могат да бъдат коректно описани. Фазовото пространство в този случай има сложна структура, което се дължи на възможните сблъсъци на тяло $P_3$ с тяло $P_2$. За $\mu > 0$ тези сблъсъци причиняват значителни пертурбации, които водят до по-нататъшно усложняване структурата на фазовото пространство. В този случай най-важни са фамилиите периодични решения, понеже те формират основната структура на част от фазовото пространство. За фиксирани стойности на параметъра $\mu$ периодичните решения на хамилтоновата система представляват едно-параметрични фамилии, и дву-параметрични при вариране на $\mu$. Проведени са няколко проучвания на тези фамилии при различни стойности на параметъра $\mu$, избрани по такъв начин, че да съответстват на определена група обекти в Слънчевата система, например системата Земя-Луна, Слънце- Юпитер, Слънце – Нептун.

**Генериране на фамилии периодични решения**

Ако дадено решение $x(t,\mu)$, в сила за някакво $\mu \equiv \mu_o > 0$, е непрекъснато по $\mu$ за произволно малки $\mu > 0$, то тогава неговата граница при $\mu \to 0$ се нарича генерирано периодично решение. Очевидно, генерираното решение е част от решенията на задачата при $\mu = 0$. Тези решения се подразделят на два вида: първият вид се състои от решения, при които тялото $P_3$ не се сблъсква с тяло $P_2$; към вторият вид принадлежат решенията, при които тялото $P_3$ се сблъсква с тялото $P_2$. Решенията на първия вид са решения на задачата за две тела $P_1$ и $P_3$ в синодична (ротационна) координатна система. Решенията за втория вид се формират в няколко части на решенията на задачата за две тела $P_1$ и $P_3$, всяка част от които започва и свършва със сблъсък на тяло $P_3$ в тяло $P_2$. Всички тези части имат една и съща стойност на хамилтониана *H*. Всички тези части представляват мрежа от едно-периодични фамилии с различен характер.

Генерираните фамилии от периодични решения се състоят от част от фамилии със симетрични периодични решения за $\mu = 0$, част от фамилии S и част от двойки фамилии $T_N$ с бифуркации между тези части (вж. Bruno 1990).




Фиг.1 Хиперболична орбита близо до тяло $P_2$

При $\mu = 0$ всички симетрични периодични решения без сблъсък на $P_3$ с $P_2$ са генерирани решения. Те формират две фамилии *Id* и *Ir* с кръгови орбити. Бифуркациите между фамилиите симетрични периодични решения се наблюдават при пресичане на фамилиите *Id*, *Ir, S.* Това съответства на изменение на характеристиките на тези фамилии.

Специално внимание трябва да се отдели по отношение на характера на генерираните фамилии от втори вид близо до тялото $P_2$. Прелитащия характер на тялото $P_3$ близо до тялото $P_2$ е изследван от (Bruno, 1981) и притежава интригуващ фазов портрет. Най-общо казано, прелитащия характер се описва посредством симетрична хиперболична орбита (фиг.1) в задачата за две тела $P_2$ (с маса *μ*) и $P_3$. Следваща стъпка е числено пресмятане на точно дефинирани фамилии с подходящо подбрани параметри.

**Литература:**


1. B r u n o A. On periodic fly-bys of the moon,1981, Cel.Mech.24(3), 255–268
2. B r u n o A. The Restricted 3-Body Problem. Plane Periodic Orbits. 1990, Nauka, p.296, Moscow
3. V o y a t z i s G., T. K o t o u l a s, J. D. H a d j i d e m e t r i o u. Symmetric and nonsymmetric periodic orbits in the exterior mean motion resonances with Neptune. 2005, CeMDA 91(4),191–202