S E N S 2 0 0 7
Third Scientific Conference with International Participation
SPACE, ECOLOGY, NANOTECHNOLOGY, SAFETY
27–29 June 2007, Varna, Bulgaria

ФРАКТАЛНИ МЕТОДИ ЗА ДИАГНОСТИКА НА ТЕХНИЧЕСКИ ОБЕКТИ, ФУНКЦИОНИРАЩИ В УСЛОВИЯ НА ВИСОКА АПРИОРНА НЕОПРЕДЕЛИНОСТ

Антонио Андонов[1], Зоя Хубенова[2], Галина Чернева[1]

[1]ВТУ “ Т.Каблешков”, София
[2]Институт за космически изследвания – Българска академия на науките
e-mail: andonov@vtu.bg; zhubenova@space.bas.bg

FRACTAL METHODS FOR DIAGNOSTICS OF TECHNICAL OBJECTS OPERATING UNDER CIRCUMSTANCES, POSSESSED BY HIGH APRIORY AMBIGUITY

Antonio Andonov[1], Zoya Hubenova[2], Galina Cherneva[1]

[1] Todor Kableshkov University of Transport, Sofia
[2]Space Research Institute – Bulgarian Academy of Sciences
e-mail: andonov@vtu.bg; zhubenova@space.bas.bg

***Key words**: Fractals, fractal analysis, information, quality of the information.*

***Abstract:** Under conditions of operation of automated objects with rapidly altering dynamic properties, and also in case of the amount of possible measurements is being limited, the problem, about the improving of diagnostic information quality, attains importance in particular. It is being expressed in terms of both accuracy and trust – worthiness increasing. In the paper hereby, a method for improvement of measurement information quality is suggested, in case of the measured physical quantities depend on either the time or each other. These are being described by means of either discrete or piecewise monotonic functions. That is, it is proposed in case of a large indefiniteness a priori, being based both on the model suggested usage and on the relatively new advances of the non –linear dynamics – chaos theory and fractal analysis.*

***Ключови думи:** фрактали, фрактален анализ, динамичен хаос, фрактална апроксимация.*

***Анотация:** В условия на функциониране на автоматизирани обекти с бързоизменяща се динамика, когато обема възможни измервания на даден обект е ограничен, особена актуалност придобива проблемът за повишаване качеството на диагностичната информация, изразяваща се в повишаването на нейната точност и достоверност. В статията е предложен метод за повишаване качеството на измерителната информация, за случаи когато зависимостта на измерваните физически величини от времето или една от друга се описват с прекъснати или локално негладки функции, т.е при голяма априорна неопределеност, основан на използването на модел, базиращ се на относително новите постижения на нелинейната динамика – теорията на хаоса и фракталния анализ.*

1. Въведение в съвременното състояние и постановка на проблема

Една от основните задачи не само в инженерната, но и в много други дейности, се състои в това, по най-добър начин да се извлекат от наблюденията данни, необходими за вземане на решения. Тази процедура се нарича оценяване. Така например в комуникациите най-често характеристиките на предаваните съобщения се определят според информацията, извличана от приеманите сигнали, които представляват изкривени от шум и смущения модулации на предаваните съобщения. Теорията на управлението, която се използва за създаване на автоматизирани системи за управление на обекти с различен характер, също се базира на наблюдения върху обкръжаващата среда. За да се използват методите за апроксимация и оценяване в конкретна инженерна задача, тази задача е необходимо да бъде формулирана математически на езика на теория на вероятностите и случайните процеси, в резултат на което да бъдат получени ефективни алгоритми за решаването й. Разработването на ефективни алгоритми обикновено е възможно само в тези случаи, когато статистиката е нормална. Допускането за марковост на процесите, означаващо, че знанието за настоящето е отделно от миналото и бъдещето, което е допустимо за редица практически задачи, често пъти не отговаря на обективната реалност. Теорията на решенията, базираща се на теория на оценяването използва баесовския подход при формиране на оценки, вземане на решения и анализ на грешките. При недостиг на априорна информация за оценяваните параметри се използва класическата оценка на максималното правдоподобие. При предположение, че са известни първите два момента на разпределение на сигнала и шума, въз основа на лемата за ортогонално проектиране и уравнението на Винер – Хопф се определя оптималната линейна оценка. За случаите на нелинейно оценяване, когато оценявания вектор на променливите на състоянието зависят от наблюдението, се въвежда уравнението на Фокер-Планк-Колмогоров, чийто приближени решения в частни производни за нелинейна филтрация в непрекъснати системи води до физически реализуеми алгоритми за изчисляване.

В много случаи обемът на възможните измервания е ограничен. Това ограничение може да бъде свързано с липсата на свободен достъп до обекта на измерване, с висока скорост на изменение на измерваните величини, с голямата цена на измервателната процедура и т.н. При това допълнителната информация за обекта на измерване на не може да се получи чрез допълнителни измервания.

Така възниква проблемът за максимално използване на наличната измерителна информация, т.е. проблемът за повишаване на нейното качество. Под качество на произволен обект се разбират обикновено показатели, характеризиращи неговата полезност. Информация за обекта на измерване е нужна в крайна сметка за приемане на управляващи решения. Затова качеството на измерителната информация е целесъобразно да се характеризира с показатели, описващи степента на нейната полезност за вземане на управляващи решения. Тези показатели могат да се разделят на четири групи:

1) характеризиращи точността на проведените измервания (метрологични);
2) описващи степента на достоверност на резултатите от измерването;
3) описващи интервала от време, протекъл от началото на измерването до получаването на резултата от потребителя (видно е, че колкото този интервал от време е по-голям, т.е. колкото повече е остаряла измервателната информация, толкова е по-ниско нейното качество);
4) характеризиращи удобната форма на представяне на измерителната информация.

В ситуации, когато няма възможности да се проведат допълнителни измервания, единствената възможност да се повиши качеството на наличната измерителна информация, е използването на априорна информация за обекта на измерване. Дадената априорна информация обикновено се формира във вид на математически модели на обекта на измерване. Ако такъв модел е зададен, повишаването качеството на измерителната информация се прави по следния начин: от начало се проверява съгласуват ли се резултатите от измерването с този априорен модел, а след това, в случай че се съгласуват, се определят параметрите на този модел. Обикновено се използват модели, в които зависимостта на различните величини една от друга и от времето се предполага, че е гладка, т.е. описват се с гладки, т.е. диференцируеми функции [1,2].

Целта на настоящата статия е да разгледа ситуацията, когато има ограничен обем измерителна информация. При това наличната измерителна информация е недостатъчна за точното определяне на статистическите характеристики на измервания процес. За тази цел обикновено се избира семейство случайни процеси, зависещи от неголям брой параметри (т.е. крайно-параметричен модел на случайния процес) и се определят параметрите на този модел по експериментални данни. Такъв процес е винеровият процес или негова модификация – процес, описан със стохастични диференциални уравнения. Ако този модел съответства на функцията на изследвания процес, резултатът на тази апроксимация води към съществено повишаване на качеството на измерителната информация. В друг случай, качеството на измерителната информация не може да се повиши – при използването за апроксимация случаен процес с малък брой параметри методичните грешка е много голяма (т.е. грешката, възникваща от разликата между модела и реалния процес) [3].

При използването за апроксимация на случаен процес с голямо число параметри, възниква същият феномен, както в случая с прекъснатата зависимост: Параметрите са много, затова точността на тяхното определяне по ограничен набор експериментални данни е недостатъчна.

Обобщавайки тези две ситуации (прекъсвания и локално негладко поведение) може да се направи следния извод: недостатъчната ефективност при използването на съществуващите модели за негладки процеси, с оглед повишаване качеството на измерителната информация, е свързана с недостатъчната адекватност на тези модели с реалните процеси.

2. Възможности за приложение на теорията на фракталите за повишаване качеството на измерителна информация

В последните десетилетия в математиката се появиха и успешно се използват нови математически модели за описване на негладки процеси: теорията на катастрофите за описване на прекъснати процеси и теорията на фракталите за описване на процеси, които са локално негладки [4,5].

Общите постановки в теорията на фракталите са основани на сложни математически понятия за метричната размерност [4,5]. Те обобщават привичното за нас понятие за размерност (гладка крива – размерност 1, повърхност – размерност 2) на негладките обекти. Например, почти всички траектории на брауновия процес имат размерност 1,5. Фрактали се наричат множества, чиято размерност не е цяла.

Основните приложения на теорията на фракталите са свързани с конкретен клас процеси, а именно стационарни случайни процеси от специален вид. Този клас може да бъде характеризиран с едно от следните условия:

1. Средният квадрат на нарастване на процеса за време τ

$M = ((x(t+\tau) - x(t))^2) = A\tau^{\alpha}$

е свързан с интервала на корелация τ чрез степенна зависимост. Тогава спектралната плътност на процеса се определя от честотата $S_x(\omega) = B\omega^{\beta}$.

2. Процесът притежава свойството мащабна инвариантност: при изменение на единиците на измерване на времето може така да се измени мерната единица, че в новите единици вероятностната мярка да се изразява със същите формули, както и в старите.

Фракталната апроксимация се прилага и при друга ситуация – априорна неопределеност, когато наличните резултати от измерването са недостатъчни за определяне на статистическите характеристики на изследваните процеси.

Може да се покаже, че при тези условия за произволен критерий за оптималност, удовлетворяващ някакви разумни условия, оптимална в смисъл на този критерий ще бъде фракталната апроксимация.

Под критерий за оптималност ще се разбира изображение, което за всяка двойка a, b семейства на m-параметрични случайни процеси показва или, че a по-добро от b (обозначава се $b < a$), или, че b е по-добро от a ($a < b$), или, че a и b от гледна точка на този критерий са равносилни ($a \sim b$). По смисъл на отношенията $<$ и $\sim$ са длъжни да удовлетворяват за всяко a, b и със следните условия:

1) $a < b$ или $a \sim b$ или $b \sim a$
2) ако $a < b$ и $b < c$, то $a < c$;
3) ако $a < b$ и $b \sim c$, то $a < c$;
4) ако $a \sim b$ и $b < c$, то $a < c$;
5) ако $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a < c$.

Двойката отношения $<$, $\sim$, удовлетворяващи условията 1) – 5), се наричат отношения на линейния порядък. Затова формализацията на понятието “критерий за оптималност” се представя като отношение на линейния порядък върху множеството от всички m-параметрични семейства от случайни величини [4].

Необходимо е критерият за оптималност да удовлетворява следните условия:

1. Критерият да бъде силен, т.е. да отделя единственото най-добро семейство от процеси. Ако той не отделя такова семейство, той може да се доуточни до по-силен критерий, като се отчете някакво допълнително свойство на семействата от процеси.

2. В условия на пълна априорна неопределеност е нужно да се ограничим само с критериите, не зависещи от единиците за измерване на променливите величини x и t, както и от стойностите на x и t, приети за начало на отчета.

Така например, ако $a < b$ и $a^{/}$, $b^{/}$ се получава от a, b чрез замяна $c \to ct+d$ и $x \to Cx+D$, то $a^{/} < b^{/}$.

Да въведем следните определения:

<u>Определение 1</u>: Ще считаме, че две семейства случайни процеси съвпадат, ако съвпадат множествата от всички реализации на всички процеси в семействата.

<u>Определение 2</u>: Коректен критерий за оптималност на m-параметричното семейство случайни процеси, ще наричаме всеки линеен предпорядък на множеството на всички тези семейства, при които:

1) съществува единствено най-добро семейство,

2) за произволни c, d, C, D, ако $a < b$, то $a^{/} < b^{/}$, където $a^{/}$, $b^{/}$ се получават от a, b чрез субституцията $c \to ct+d$ и $x \to Cx+D$.

Горните определения определят приложимостта на следната теорема: За еднопараметричните семейства (m=1) не съществуват коректни критерии за оптималност; за двупараметрични семейства (m=2) за кой да е коректен критерий за оптималност моментите на първите два порядъка на семействата на случайните процеси съвпадат с моментите за семействата фрактали, т.е.

$$E(f(x)) = 0, E((f(x) - f(y))^2) = A(x-y)^{\alpha},$$

където α е числен параметър (наричан скейлинг).

Изборът на скейлинга α може да бъде осъществен на базата на отчитане на физични съображения, или въз основа на статистически анализ на експериментални данни.

Така например при обработка на комуникационни сигнали, в случай, когато е необходимо да се възстанови изходният сигнал x(t) от сместа сигнал-шум y(t) = x(t) + ξ(t), за описание, както на сигнала, така и на адитивния шум ξ(t), може да се използва фракталната апроксимация $S_x(\omega) = B\omega^{\beta}$, $S_{\xi}(\omega) = B\psi^{/}$. Тогава оптималният метод на корекция (т.е. оптимален винеров филтър) ще бъде преобразованието:

$$\tilde{x}(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{1 + D\omega^{\delta}},$$

където y(jω) е преобразование на Фурие от коригираната стойност, а $\tilde{x}(j\omega)$ - преобразование на Фурие от оценката.

Параметрите D и δ се определят от параметрите на фракталната апроксимация: D=C/B. В частност, при цели δ получаваме известната процедура на тихоновата регуляризация [6]. Следователно, при мащабно инвариантни процеси, а също в условия на априорна неопределеност оптималният метод на корекция на динамичната съставляваща на грешката е тихоновата регуляризация или нейна модификация.

За използването на фракталната апроксимация на измерваните процеси е необходимо по резултатите на измерването да се определят техните параметрите B,β. За тази оценка е целесъобразно да се използва асимптотично оптимален метод на оценка на параметрите на вероятностното разпределение – методът на максималното правдоподобие, т.е. условието

$$p \to \max_{B,\beta},$$

където p е вероятностната плътност за това, че при зададени B и β, съответстващата реализация на случайния процес води до измерената стойност на $x(t_i)$.

Ако се предположи, че изследваният процес е гаусов и стационарен, то неговите честотни компоненти x(jω) са независими и всяка от тях е разпределена по нормален закон с дисперсия

$$P = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi B\omega_i^{\beta}}}\exp\left(-\frac{x^2(j\omega_i)}{2B\omega_i^{\beta}}\right)\right),$$

където $x(j\omega_i)$ – е стойността на преобразованието на Фурие от $x(t_i)$.

Преминавайки от постановка P$\to$max към равносилната, но по-удобна за анализ постановка ln p $\to$min, получаваме:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ln(B\omega_i^{\beta}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x^2(j\omega_i)}{B\omega_i^{\beta}} \to \min_{B,\beta}.$$

Като се диференцира по B и приравни производната на нула, се получава явен израз за B в термините на β:

(1) $$B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x^2(j\omega_i)}{\omega_i^{\beta}}.$$

Като се диференцира по β, приравни на нула и подмени B с равенство (1), се получава следният израз за определение на β:

(2) $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\omega_i - \frac{\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{x^2(j\omega_i\ln(\omega_i)}{\omega_i^{\beta}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{x^2(j\omega_i)}{\omega_i^{\beta}}} = 0$$

В резултат може да се предложи следният метод за определяне на параметрите B, β на оптималната фрактална апроксимация:

1) осъществява се преобразованието на Фурие за резултата от измерването $x(t_i)$,т.е. от времевата $x(t_i)$,…, $x(t_n)$ преминаваме към честотната област $x(j\omega_i)$,…, $x(j\omega_n)$;
2) определяме β от уравнение (2);
3) определяме B по формула (1).

Получените резултати могат да се използват за корекция на динамичната съставяща на грешката.

3. Изводи

В условия когато обемът възможни измервания на даден обект е ограничен, особена актуалност придобива проблемът за повишаване качеството на измерителната информация, изразяващо се в повишаването на нейната точност и достоверност. Известните методи за тази цел са ефективни, когато предварително е известно, че зависимостта на измерваните физически величини от времето, или една от друга, се описват чрез диференцируеми, респ. гладки функции. Когато тази зависимост е прекъсната или локално негладка, качеството на измеримата информация е възможно да се повиши чрез използване на модели, основани на относително новите постижения на математиката – теорията на хаоса и фракталния анализ.Предложеният подход в настоящата статия за повишаване качеството на измерителната информация не само води до повишаване на нейната точност и достоверност, но позволява и по-компактно и удобно представяне.

Литература

1. Д е й в и д Г. Порядковые статистики. М.Наука, 1989.
2. С е й д ж Э., Дж. М е л с. Теория оценивания и ее применение в связи и уравленя. М. Связь. 1979.
3. Т и х о н о в В.И. Нелинейные преобразувания случайных процессов. М.Радио и связь,1986.
4. R o o t W.L. Remarks on Signal Detection and Signal Parameter Estimation. Universiti of Michigan. MI 48109, USA.2003.
5. T h o m R., B. M a n d e l b r o t. Fractal geometry. San. Fr. 2005.