S E N S   2 0 0 7
Third Scientific Conference with International Participation
SPACE, ECOLOGY, NANOTECHNOLOGY, SAFETY
27–29 June 2007, Varna, Bulgaria

ХАОТИЧНА ДИНАМИКА НА СПЪТНИК, ДВИЖЕЩ СЕ ПО КРЪГОВА ОРБИТА В ГРАВИТАЦИОННО ПОЛЕ, ПОДЛОЖЕН НА ДЕЙСТВИЕТО НА МАГНИТЕН И ПРИЛИВЕН МОМЕНТ

Костадин Шейретски[1], Пламен Тренчев[1], Георги Киров[2]

[1]Институт за космически изследвания - Българска академия на науките
e-mail: ksheiretsky@space.bas.bg
[2]Институт по управление и системни изследвания - Българска академия на науките
e-mail: kirov@icsr.bas.bg

CHAOTIC DYNAMIC OF SATELLITE MOVING ALONG CIRCULAR ORBIT IN THE GRAVITATIONAL FIELD, INFLUENCED BY MAGNETIC AND TIDAL MOMENTS

Kostadin Sheiretsky[1], Plamen Trenchev[1], Georgi Kirov[2]

[1]Space Research Institute - Bulgarian Academy of Sciences,
[2]Institute of Control and System Research - Bulgarian Academy of Sciences

***Key words**: celestial mechanics, nonlinear oscillations, chaotic dynamic*

***Abstract**: The movement of the satellite round the circular orbit is a known and successfully investigated task using analytical methods. Adding of the tidal moment as well as reporting of the magnetic field of the satellite could lead quality different dynamic phenomenon. Simultaneously with the regular decisions could appear a new one describing stohastic result. During the process, the conditions in which the chaotic movement appeared are defined, in case of non defined solid as well.*

***Ключови думи**: небесна механика, нелинейна динамика, хаотични системи.*

***Резюме**: Движението на спътник по кръгова орбита е задача, считана за позната и успешно изследвана посредством аналитични методи. Добавянето на приливния момент, както и отчитането на магнитното поле на спътника, могат да доведат до изненадващи качествено различни динамични явления. Наред с регулярните решения могат да се получат и решения, описващи стохастично поведение. В работата са определени условията, при които настъпва хаотично движение, в случай на произволно твърдо тяло, както и при сферично тяло.*

Въведение

Динамиката на въртеливото движение на близките до централното тяло спътници, в голяма степен се определя от приливния момент. При условие, че скоростта на въртене на спътника е различна от скоростта на неговото движение около привличащия център, възникват деформации по повърхността на спътника и се образуват приливни гърбици.

Преместването на приливните гърбици води до преразпределение на масите на тялото, а следователно изменя и момента на инерция.

Някои небесни тела създават в пространството забележими магнитни полета. Взаимодействието на тези полета може да окаже съществено влияние на динамиката на спътниците.

Едновременните действия на гравитационния, приливния и магнитния моменти, се разглеждат в случая на равнинно въртене на спътника, който е постоянно намагнитен по протежение на една от главните оси на елипсоида си на инерция, намира се в нютоново гравитационно поле и диполно поле с $\vec{H} = \frac{\mu_c}{r^3}\left\{3\left(\vec{K}.\vec{e}_r\right)\vec{e}_r - \vec{K}\right\}$, където μ_c е модул на постоянния магнитен момент на централното тяло, $\vec{K}$ е орт на вектора на магнитния момент, $\vec{e}_r$ е орт на радиус-вектора на точката в пространството, в което се определя напрегнатостта. Оста на дипола през цялото време се намира в равнината на орбитата на небесното тяло. Уравнението, което описва поставената от нас задача [2] е

(1) $$\frac{d^2\delta}{du^2}+\beta\frac{d\delta}{du}+n^2\sin\delta=3\alpha\cos\left(\frac{\delta}{2}-u\right)-\alpha\cos\left(\frac{\delta}{2}+u\right),$$

където $n^2=\frac{3(A-C)}{2B}$, A,B,C - главни моменти на инерция, $\mu=M\gamma$, γ - гравитационна константа, M - маса на централното тяло, $\alpha=\frac{I\mu_c}{B\mu}$, I - постоянен магнитен момент на небесното тяло, с посока успоредна на момента на инерция C, $u=\upsilon+\omega$, υ - истинска аномалия, ω - постоянна инклинация на радиус-вектора на перигея на спътниковата орбита по отношение на екватора на планетата, $\delta=2\Theta$, Θ е ъгълът образуван от посоката определена от C и текущия радиус-вектор на орбитата.

В случая, когато спътникът има сферична форма, т.е. $n^2=0$, може да въведем нова променлива x посредством равенството

$$x=\frac{\delta}{2}-\frac{\pi}{2}-u.$$

В този случай уравнение (1) приема вида

(2) $$\frac{d^2x}{du^2}+\beta\left(\frac{dx}{du}+1\right)+\varpi^2\sin x=\frac{\varpi^2}{3}\sin(x+2u),$$

където $\varpi^2=\frac{3\alpha}{2}$.

Задачата, която си поставяме е посредством анализ на уравненията (1) и (2) да се определят условията, при които настъпва преход от регулярно към хаотично движение.

Хаотичен режим при несферична форма на спътника

Нека направим замяната $nu=\tau$ в уравнение (1). Означаваме с $\beta_1=\frac{\beta}{n^2}$ и $\alpha_1=\frac{\alpha}{n^2}$. Въвеждаме две нови променливи η и θ и свеждаме уравнение (1) до системата

$$\dot{\delta}=\eta,$$

$$\dot{\eta}=-\sin\delta-\beta_1\eta+3\alpha_1\cos\left(\frac{\delta}{2}-\theta\right)-\alpha_1\cos\left(\frac{\delta}{2}+\theta\right),$$

(3) $$\dot{\theta}=\frac{1}{n}.$$

С точка в случая е означена производната по новата променлива τ.
Използваме метода на Мелников, който позволява да се изследва стохастичността в близост до сепаратрисите при наличие на дисипация. Съгласно теорията [3], въвежда се дистанцията на Мелников $D(\tau_0)$ посредством равенството

(4) $$D(\tau_0,\tau_0)=-\int_{-\infty}^{+\infty}f_0\wedge f_1\,d\tau$$

и тя определя характера на движението, в случай че променя знака си, тогава движението в разглежданата област е хаотично. Операторът $\wedge$ се дефинира съгласно закона

$$f_0\wedge f_1=f_{01}f_{11}-f_{02}f_{12},$$ където $$f_0=\begin{pmatrix}f_{01}\\ f_{02}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_s\\ \sin\delta_s\end{pmatrix}$$ и

$$f_1=\begin{pmatrix}f_{11}\\ f_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\beta_1\eta_s+3\alpha_1\cos\left(\frac{\delta_s}{2}-\theta\right)-\alpha_1\cos\left(\frac{\delta_s}{2}+\theta\right)\end{pmatrix};\ \delta_s=2\arcsin(th\tau),\ \eta_s=\frac{2}{ch\tau}.$$

Определяме θ по следния начин $\theta=\frac{\tau}{n}+\theta_0$. Окончателната форма на интеграла (4) приема вида

$$D(\tau,\tau_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{4\beta_1}{ch^2\tau}-\frac{6\alpha_1}{ch\tau}\cos\left(\arcsin th\tau-\frac{\tau}{n}-\theta_0\right)+\frac{2\alpha_1}{ch\tau}\cos\left(\arcsin th\tau+\frac{\tau}{n}+\theta_0\right)\right\}d\tau$$

(5)

Използваме свойствата на тригонометричните функции и достигаме до израза

(6) $$D(\tau,\tau_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4\beta_1}{ch^2\tau}d\tau-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4\alpha_1}{ch^2\tau}\cos\left(\frac{\tau}{n}+\theta_0\right)d\tau-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{8\alpha_1}{ch^2\tau}\cos\left(\frac{\tau}{n}+\theta_0\right)d\tau\ .$$

Интегрирането извършваме, като отчетем, че само симетричните функции не анулират интеграла. Окончателно изразът за D приема вида

(7) $$D(\tau,\tau_0)=8\beta_1-\frac{4\alpha_1\pi}{n}\cos\theta_0\left(\frac{1}{sh\frac{\pi}{2n}}+\frac{2}{ch\frac{\pi}{2n}}\right).$$

При условие $D=0$ и като вземем под внимание факта, че $\left|\cos\theta_0\right|<1$ и $\beta_1>0$, главното условие за преход от регулярно към хаотично поведение на динамичната система взима формата

(8) $$\frac{\beta_1}{\alpha_1}<\frac{\pi}{2n}\left(\frac{1}{sh\frac{\pi}{2n}}+\frac{2}{ch\frac{\pi}{2n}}\right).$$

Уравнение (8) показва при какво отношение на двата параметъра β_1 и α_1 се осъществява пресичане на входящата и изходящата сепаратриси в безкраен брой хомоклинични точки.

Хаотичен режим при сферична форма на спътника

Нека направим замяната $\varpi u=\tau$ в уравнение (2). Означаваме с $\beta_2=\dfrac{\beta}{\varpi^2}$ и въвеждаме две нови променливи η и θ, като свеждаме уравнение (2) до системата

$$\frac{dx}{d\tau}=\eta\ ,$$

$$\frac{d\eta}{d\tau}=-\sin\delta-\beta_2(\eta+1)+\frac{1}{3}\sin(x+2\theta)\ ,$$

(9) $$\frac{d\theta}{d\tau}=\frac{1}{\varpi}\ .$$

Използваме описаната по-горе процедура и достигаме до следната форма на интеграла на Мелников

(10) $$D(\tau,\tau_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4\beta_2}{ch^2\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\beta_2}{ch\tau}d\tau-\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\left(2\arcsin th\tau+\frac{2\tau}{\varpi}+\theta_0\right)}{ch\tau}d\tau\ .$$

Като извършим интегрирането се достига до резултата

(11) $$D(\tau,\tau_0)=(8+2\pi)\beta_2+\frac{8\pi}{3\varpi^2}\left(\frac{1}{sh\frac{\pi}{\varpi}}-\frac{1}{ch\frac{\pi}{\varpi}}\right)\sin\theta_0\ .$$

Когато знакът на $D(\tau,\tau_0)$ се мени, сепаратрисите се пресичат и движението в дадената област се явява хаотично. От (11) следва, че това произтича при

(12) $$\beta_2 < \frac{8\pi}{3\varpi^2(8+2\pi)}\left(\frac{1}{sh\frac{\pi}{\varpi}} - \frac{1}{ch\frac{\pi}{\varpi}}\right).$$

Хамилтонияна на динамичната система, описваща движението на сферичен спътник под действието на магнитен момент (в отсъствие на приливен момент), се дава с израза:

(13) $$H = \frac{\left(\frac{dx}{du}\right)^2}{2} - \varpi^2 \cos x + \frac{\varpi^2}{3}\cos(x+2u).$$

За подобни динамични системи е известно [4], че се характеризират с появата на хаотични зони в областта около сепаратрисите. Целта ни е да оценим ширината на получения стохастичен слой.

Взимаме съответните изрази за променливите съответстващи на сепаратрисния случай

$$\bar{x} = 4arctg\, e^{\pm\varpi(t-t_n)},$$

(14) $$\dot{\bar{x}} = \pm\frac{2\varpi}{ch\varpi(t-t_0)}.$$

Нека $(E,\varphi) \to (\overline{E},\overline{\varphi})$ е изображение, свързващо параметрите преди действието на импулса на скоростта отчетено за време равно на половин период. Тогава това изображение в явен вид се записва така

$$\overline{E} = E + \Delta E,$$

(15) $$\overline{\varphi} = \varphi - \frac{2\pi}{\omega(\overline{E})}.$$

За да се оцени локалната неустойчивост, се въвежда параметъра k

(16) $$k = \left|\frac{\delta\overline{\varphi}}{\delta\varphi} - 1\right|.$$

При $k \geq 1$ възниква локална неустойчивост по фазата.

В разглежданият от нас случай, изразът за параметъра k има вида

(17) $$k = \frac{2}{\varpi}\frac{\Delta E}{|E - E_s|}|\sin\varphi|.$$

Изменението на енергията, за определено време, на несмутения хамилтониян, под действието на смущението се намира с интеграла

(18) $$\Delta E = \frac{\varpi^2}{3}\int_{\Delta u}\sin(x+2u)\dot{x}du.$$

Нека центъра на солитона е разположен в точка t_n. Доколкото $\dot{\bar{x}}$ експоненциално намалява с времето, записваме интеграла (17) във вида:

(19) $$|\Delta E| = \frac{\varpi^2}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(\bar{x} + \frac{2}{\varpi}\tau + \varphi_n\right)\dot{\bar{x}}\frac{d\tau}{\varpi},\ \Omega_{01}(t-t_n) = \tau,\ \varphi_n = \lambda t_n.$$

Интегралът (19) може да се сведе до следната форма:

(20) $$|\Delta E| = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(\bar{x} + \frac{2}{\varpi}\tau + \varphi_n\right)d\tau.$$

Решението му се намира лесно, защото представлява интеграл на Мелников-Арнолд. Така окончателно за изменението на енергията се получава:

(21) $$\left|\Delta E\right| = \frac{8\pi}{3\varpi}\frac{\exp\left(-\frac{\pi}{\varpi}\right)}{sh\frac{\pi\varpi}{2}}\left|\sin\varphi_n\right|.$$

Като се използва (17) даваме оценка за ширината на стохастичната зона в околност на сепаратрисите.

(22) $$\left|E - E_s\right| \le \frac{16\pi}{3\varpi}\frac{\exp\left(-\frac{\pi}{\varpi}\right)}{sh\frac{\pi\varpi}{2}}.$$

Уравнение (22) показва, че макар и да пренебрегнем приливния момент при движението на даден сферичен спътник, наличието на магнитен момент дава основания да очакваме хаотично движение при определени условия.

Заключение

Направеният анализ ясно показва, че хаотичното движение е характерно и за динамични системи, разглеждани като сравнително прости - кръгови орбити, наличие на симетрии и т.н.. Налага се изводът, че нерегулярното движение не е екзотика, а често срещано явление, което може да се наблюдава при движението на космически обекти. При определени обстоятелства фактори, чието пренебрегване се счита за несъществено при анализа, могат качествено да променят движението. Познаването на границите в пространството на параметрите, за които можем да твърдим, че дадено движение остава регулярно е от огромно значение за движението на изкуствените спътници. От друга страна, поставянето на подобни аналитични задачи дават обяснение на редица „загадъчни” наблюдателни данни на естествени небесни тела.

Литература:

1. Б е л е ц к и й В. В. Движение искусственого спутника относительно центра масс . Москва, Наука, 1965
2. Б е л е ц к и й В. В., А. А. Х е н т о в. Вращательное движение намагниченного спутника. Москва, Наука, 1980.
3. L i c h t e n b e r g A. J., M.A. L i e b e r m a n. Regular and stochastic motion. Springer-Verlag New York Inc, 1983.
4. З а с л а в с к и й Г. Стохастичность динамических систем. Москва, Наука