S E N S ' 2 0 0 6

Second Scientific Conference with International Participation

SPACE, ECOLOGY, NANOTECHNOLOGY, SAFETY

14 – 16 June 2006, Varna, Bulgaria

ВЗАИМОВРЪЗКА МЕЖДУ ПОСТЪПАТЕЛНО И ВЪРТЕЛИВО ДВИЖЕНИЕ НА СПЪТНИК НА КРЪГОВА ОРБИТА В ЦЕНТРАЛНО ГРАВИТАЦИОННО ПОЛЕ

Костадин Шейретски, Владимир Дамгов, Пламен Тренчев

Институт за Космически Изследвания, БАН
ул. Московска N 6, София 1000,

INTERRELATION BETWEEN ORBITAL AND SPIN MOTION OF A SATELLITE ON CIRCULAR ORBIT IN A CENTRAL GRAVITATIONAL FIELD

Kostadin Sheyretsky, Vladimir Damgov, Plamen Trenchev

Space Research Institute at the Bulgarian Academy of Sciences,
6 Moskowska str., 1000, Sofia, Bulgaria

***Key words**: celestial mechanics, nonlinear oscillations.*

ABSTRACT: A system of equations of planar circular motion and phase portrait of the dynamical system is analyzed and proposed. Effects of interrelation between orbital and rotational movement is examined.

Когато тялото се движи в нютоново централно поле на силите и не се разглежда като материална точка, а като твърдо тяло с краен размер, тогава строго погледнато постъпателното и въртеливото движение са свързани. Като следствие центърът на масите се движи не по кеплерова орбита.

Размерите на реалните спътници са доста по-малки от размерите на орбитата по която се движат. Естествено е да се предположи, че влиянието между постъпателното и въртеливото движение може да се пренебрегне.Този подход широко се използва при изучаване на въртенето на небесните тела, а задачата която се решава се нарича ограничена.

Задачата за връзката между постъпателното и въртеливото движение представлява съществен теоретичен интерес и може да се приложи за развиване и доуточняване някои теории на небесната механика. Такава постановка може да доведе до откриване на нови нелинейни ефекти, които биха имали важно теоретично, а в много случаи и практическо значение, като се има предвид приложението при изкуствените спътници на Земята.

Определяме положението на центъра на масите O' посредством полярни координати R, φ, с център на к.с. O съвпадащ с центъра на планетата, а положението на една от централните оси на инерция на тялото спрямо радиусвектора отбелязваме с ъгъл Θ

Разглеждаме приближение на гравитационния потенциал във вида

$$U = \frac{\mu M}{R} - \frac{\mu}{2R^3}\left(A+B+C\right) - \frac{3\mu}{2R^3}\left(A\sin^2\Theta + C\cos^2\Theta\right) \qquad (1)$$

Уравненията на движение за приетият от нас потенциал се записват във формата

$$B\frac{d}{dt}\left(\dot{\Theta}+\dot{\varphi}\right) + 3\frac{\mu}{R^3}\left(A-C\right)\sin\Theta\cos\Theta = 0,$$

$$\frac{1}{2}M\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}B\left(\dot{\Theta}+\dot{\varphi}\right)^2 - \frac{\mu M}{R} - \frac{1}{2}\frac{\mu}{R^3}\left[\left(B+C-2A\right)\sin^2\Theta + \left(B+A-2C\right)\cos^2\Theta\right] = H$$

$$MR^2\dot{\varphi} + B\left(\dot{\varphi}+\dot{\Theta}\right) = L_s, \qquad (2)$$

където A, B, C са главните моменти на инерция на тялото H е интеграл на енергията на системата, L_s - интеграл на общия момент на системата.

Нека $\dot{R} = 0$, т.е. $R = R_0 = const.$. От третото уравнение на системата следва

$$\dot{\varphi} = \frac{L_s}{MR_0{}^2 + B} - \frac{B}{MR_0{}^2 + B}\dot{\Theta}. \qquad (3)$$

Заместваме в първото уравнение на системата (1)

$$\ddot{\Theta}\left(1 - \frac{B}{MR_0{}^2 + B}\right) + \frac{3}{2}\frac{\mu}{R_0{}^3}\frac{A-C}{B}\sin 2\Theta = 0.$$

Израза може да се запише по-компактно по следния начин

$$\ddot{\Theta} + \frac{\Omega^2}{2}\sin 2\Theta = 0, \qquad (4)$$

$$\Omega^2 = 3\frac{\mu}{R_0{}^3}\frac{A-C}{B}\left(\frac{MR_0{}^2 + B}{MR_0{}^2}\right).$$

Интегрираме уравнението

$$\frac{\dot{\Theta}^2}{2} + \frac{\Omega^2}{2}\sin^2\Theta = h_0, \; h_0 = const.. \qquad (5)$$

Изразяваме първата производна на променливата по времето

$$\dot{\Theta} = \pm\sqrt{2h_0 - \Omega^2\sin^2\Theta}. \qquad (6)$$

Да анализираме фазовия портрет на динамичната система. В зависимост от съотношението между параметрите системата може да бъде в три различни режима. Във фазовото пространство те могат да се представят в съвсем проста математическа форма, ако разгледаме някои характерни случаи.

За определеност считаме, че $A > C$.

РОТАЦИЯ: $2h_0 >> \Omega^2$

Разлагаме израза за $\dot{\Theta}$ в ред и взимаме членовете от най-нисък порядък

$$\dot{\Theta} = \pm\sqrt{2h_0} \mp \frac{\Omega^2}{2\sqrt{2h_0}}\sin^2\Theta .$$

СЕПАРАТРИСЕН РЕЖИМ: $2h_0 = \Omega^2$

Веднага получаваме

$$\dot{\Theta} = \pm\Omega\cos\Theta .$$

Това уравнение може да се интегрира директно при $t = 0, \Theta = 0$

$$\ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}\right) = \Omega t .$$

Така се получава зависимостта на Θ от времето

$$\Theta = arctge^{\Omega t} - \frac{\pi}{2} .$$

Като се използват свойствата на гудерманияна следва, че

$$ch\Omega t = \frac{1}{\sin\Theta} .$$

Следователно може да се запише

$$\dot{\Theta} = \pm\frac{\Omega}{ch\Omega t} ,$$

това решение представлява солитон.

КОЛЕБАНИЯ: $2h_0 << \Omega^2$

За да бъде неотрицателен израза под корена трябва $\frac{\Omega^2}{2h_0}\sin^2\Theta \leq 1$, следователно $\sin^2\Theta \leq \frac{2h_0}{\Omega^2} << 1$, от тук следва, че при $\Theta = k\pi + \theta$, $\theta << 1$, $k \in Z$, може да се приеме, че $\sin^2\Theta \approx \theta^2$. Първият интеграл, може в случая да се запише

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{\Omega^2\theta^2}{2} = h_0 .$$

Това е уравнение на елипси. Съответно при $\Theta = \frac{k}{2}\pi + \theta$, $\theta << 1$, $k \in Z$, първият интеграл се записва във формата

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\Omega^2\theta^2}{2} = h_0 - \frac{\Omega^2}{2} .$$

От фазовия портрет е видно, че точките 0 и π са точки на устойчиво равновесие и съответно $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ точки на неустойчиво равновесие. С други думи, при устойчиво равновесие най-голямата от двете оси x', z' на елипсоида на инерцията - z' е насочена по радиусвектора.

Когато $A < C$, устойчиво положение на равновесие ще има в точките $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$.

Това значи, че най-голямата ос на елипсоида на инерцията, този път x' отново ще бъде насочена по радиусвектора.

Уравнението може да бъде интегрирано точно в специални функции за различните случаи.

Разделяме променливите в уравнението и записваме

$$t - t_0 = \int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{d\Theta}{\sqrt{2h_0 - \Omega^2 \sin\Theta}}, \tag{7}$$

тук Θ и Θ_0 са точките на обръщане. Въвеждаме модула на елиптичния интеграл $\kappa^2 = \frac{2h_0}{\Omega^2}$. В случая на колебателен режим $\kappa^2 < 1$. Полагаме $\sin\Theta = \kappa \sin\varphi$. Израза за интеграла (7) придобива вида

$$\Omega(t - t_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2\varphi}}. \tag{8}$$

Означаваме

$$F = \int_{0}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2\varphi}}. \tag{9}$$

Като обърнем интеграла се получава

$$\sin\Theta = \kappa\, sn\left[\Omega(t - t_0) + F; \kappa^2\right] \tag{10}$$

Периодът T на колебанията се дава с формулата

$$T = \frac{4K(\kappa^2)}{\Omega} \approx \frac{2\pi}{\Omega}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \kappa^2 + \ldots\right], \tag{11}$$

където $K(\kappa^2)$ е пълен елиптичен интеграл от първи род.

Ако T_R е периода получен при разглеждане на ограничената задача без отчитането на връзката между колебателното и орбиталното движение, тогава, като отчетем тази връзка се получава

$$T = T_R \sqrt{\frac{MR_0{}^2 + B}{MR_0{}^2}} \approx T_R\left(1 + \frac{B}{2MR_0{}^2}\right), \tag{12}$$

където

$$T_R = \frac{2\pi}{\sqrt{3\frac{\mu}{R_0{}^3}\frac{A - C}{B}}}. \tag{13}$$

Очевидно, като се отчита влиянието между двата момента се оказва, че периода на колебанията е по-голям, отколкото периода определен в ограничената задача.

Нека разгледаме как връзката влияе на орбиталното движение.

Записваме уравнението за $\dot{\Theta}$ във вида

$$\dot{\Theta} = \pm\sqrt{2h_0 - \Omega^2 + \Omega^2 \cos^2\Theta}.$$

Вижда се, че при колебателен режим са изпълнени неравенствата

$$\left|\dot{\Theta}\right| < \Omega\left|\cos\Theta\right| \le \Omega. \tag{14}$$

От тук следва, че максималното изменение което може да претърпи $\dot{\varphi}$ е

$$\left|\Delta\dot{\varphi}\right| = 2\sqrt{3\varpi^2 \frac{B(A - C)}{MR_0{}^2\left(MR_0{}^2 + B\right)}}, \tag{15}$$

където $\varpi^2 = \dfrac{\mu}{R_0^3}$.

В случая, когато $\kappa^2 > 1$ динамичната система е в режим на ротация. Тогава постъпваме така, полагаме $\tilde{\kappa}^2 = \dfrac{1}{\kappa^2} < 1$. За интегралът (7) се получава

$$\sqrt{2h_0}\left(t - t_0\right) = \int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{d\Theta}{\sqrt{1 - \tilde{\kappa}^2 \sin^2 \varphi}} . \qquad (16)$$

Решението е

$$\Theta = am\left\lfloor \sqrt{2h_0}\left(t - t_0\right) + \tilde{F}; \tilde{\kappa}^2 \right\rfloor, \qquad (17)$$

където

$$\tilde{F} = \int_0^{\Theta_0} \frac{d\Theta}{\sqrt{1 - \tilde{\kappa}^2 \sin^2 \varphi}} . \qquad (18)$$

Периодът на въртене в случая е

$$T = \frac{4K\left(\tilde{\kappa}^2\right)\tilde{\kappa}}{\Omega} \approx \pi \sqrt{\frac{2}{h_0}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \tilde{\kappa}^2 + \ldots \right], \qquad (19)$$

където $K\left(\tilde{\kappa}^2\right)$ е пълен елиптичен интеграл от първи род.

В първо приближение периода на ротация определен за задачата разгледана от нас съвпада със съответния период определен при ограничената задача.

Използваме приближените формули за ротацията, оказва се че при въртенето в различна посока, големината на $\dot{\varphi}$ е различна

$$\dot{\varphi}_+ = \frac{L_s}{MR_0^2 + B} - \frac{B}{MR_0^2 + B}\sqrt{2h_0} + \frac{B}{MR_0^2 + B}\frac{\Omega^2}{2\sqrt{2h_0}}\sin^2\Theta ,$$

като пренебрегнем последното събираемо се получава

$$\dot{\varphi}_+ \approx \frac{L_s}{MR_0^2 + B} - \frac{B}{MR_0^2 + B}\sqrt{2h_0} . \qquad (20)$$

Аналогични и за въртене в другата посока

$$\dot{\varphi}_- = \frac{L_s}{MR_0^2 + B} + \frac{B}{MR_0^2 + B}\sqrt{2h_0} - \frac{B}{MR_0^2 + B}\frac{\Omega^2}{2\sqrt{2h_0}}\sin^2\Theta ,$$

Последното събираемо е по-малко от останалите и го пренебрегваме, крайният резултат е

$$\dot{\varphi}_- \approx \frac{L_s}{MR_0^2 + B} + \frac{B}{MR_0^2 + B}\sqrt{2h_0} . \qquad (21)$$

Нека изразим енергията на системата чрез останалите постоянни величини характеризиращи движението. Трансформираме третото уравнение на система (2) във вида

$$\frac{L_s^2}{2\left(MR_0^2 + B\right)} - \frac{\mu M}{R_0} - \frac{1}{2}\frac{\mu}{R_0^3}\left(B + A - 2C\right) + \frac{1}{2}\frac{MR_0^2 B}{MR_0^2 + B}\dot{\Theta}^2 + \frac{B\Omega^2}{2}\frac{MR_0^2 B}{MR_0^2 + B}\sin^2\Theta = H . \qquad (22)$$

Като имаме предвид $\dot{\Theta}^2 = 2h_0 - \Omega^2 \sin^2 \Theta$, заместваме в горното уравнение и окончателно получаваме

$$\frac{L_s^{\,2}}{2\left(MR_0^{\,2} + B\right)} - \frac{\mu M}{R_0} - \frac{1}{2}\frac{\mu}{R_0^{\,3}}\left(B + A - 2C\right) + \frac{MR_0^{\,2} B}{MR_0^{\,2} + B} h_0 = H \; . \qquad (23)$$

За сепаратрисният случай израза за енергията съответно е

$$\frac{L_s^{\,2}}{2\left(MR_0^{\,2} + B\right)} - \frac{\mu M}{R_0} - \frac{1}{2}\frac{\mu}{R_0^{\,3}}\left(B + A - 2C\right) + \frac{MR_0^{\,2} B}{MR_0^{\,2} + B} \frac{\Omega^2}{2} = H \qquad (24)$$

От направеният анализ е ясно, че ефектите възникващи в резултат на взаимодействието между орбиталния момент и ротационния момент се проявяват толкова по-силно, колкото по-малко е разстоянието от централното тяло до спътника и колкото по-големи са размерите на спътника. Порядъка на възникващите нелинейни ефекти е $\frac{l^2}{R_0^{\,2}}$, където l е най-общо линейния размер на спътника. Очевидно предположението, че ограничената задача води до коректни решения е оправдано в случаите когато описаните динамични ефекти са пренебрежимо малки, така че настоящата работа определя и границите на приложимост на този подход.

Литература:

1. Белецкий, В. В. Движение искусственого спутника относительно центра масс . Москва, Наука, 1965.
2. Белецкий, В. В. Хентов, А. А. Вращательное движение намагниченного спутника. Москва, Наука, 1980.
3. Белецкий, В. В. Пономарева, О. Н. Параметрический анализ устойчивисти относительного равновесия в гравитационном поле. Космические исследования, т.28, в. 5, 1990.
4. Lichtenberg, A. J., Lieberman, M.A. Regular and stochastic motion. Springer-Verlag New York Inc. 1983.